Jean-Christophe MOUTONNET

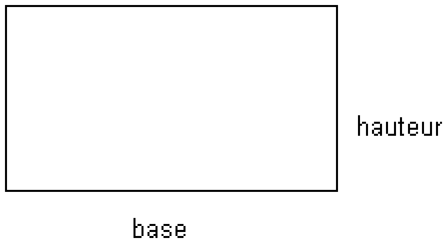
AIRE_1

Aire d'une surface

Aire du rectangle et du carré

Un rectangle a deux dimensions : la longueur et la largeur.
L'aire d'un rectangle est obtenue en multipliant la mesure de la longueur par celle de la largeur. La connaissance de cette aire servira de référence pour calculer les autres.

Si on « pose » le rectangle horizontalement sur un de ses côtés, on peut parler de base et de hauteur.
La base est l'un des côtés du rectangle au choix. La hauteur est un segment issu d'un sommet et perpendiculaire à la base opposée à ce sommet. La hauteur n'est pas nécessairement un côté. Dans le cas de la figure ci-contre, la hauteur est la largeur du rectangle et la base est la longueur.
Ce point de vue (restrictif) consistant à imposer une disposition verticale sera utile pour la compréhension des aires d'autres figures.



Aire du rectangle : $A = L \times l$

Aire du rectangle : $A = b \times h$.

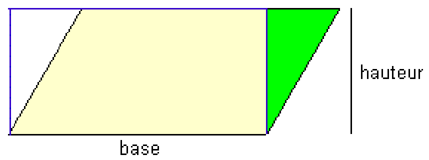
Le carré n'est qu'un cas particulier du rectangle ; la hauteur et la base sont les côtés du carré. La formule de calcul de l'aire est donc la même.

Aire du carré. A = cxc ou **Aire du carré.** $A = c^2$

La terminologie « base » et « hauteur » permet de retenir une formule unique pour le rectangle et le carré et de retrouver les autres à partir de celle-ci.

Aire du parallélogramme

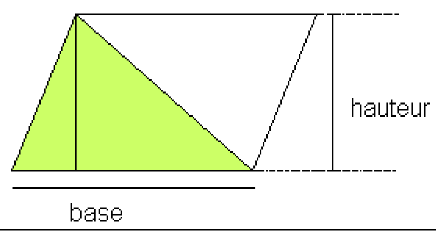
En découpant le triangle de droite et en le plaçant de l'autre côté du parallélogramme, on obtient un rectangle dont l'aire est égale au produit b×h.
L'aire du parallélogramme est égale à celle d'un rectangle dont l'un des côtés serait une des bases du parallélogramme et l'autre côté, la hauteur relative à cette base.
Si on utilise la petite base, il faut prendre comme hauteur celle relative à la petite base.



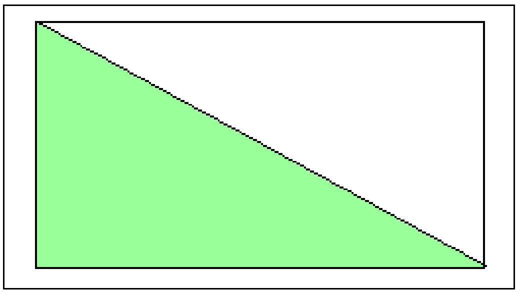
Aire du parallélogramme : $A = b \times h$.

Aire du triangle

En plaçant deux triangles égaux comme sur le dessin ci-contre, on obtient un parallélogramme dont l'aire est égale au produit de la base par la hauteur du triangle.
En divisant ce résultat par deux on obtient l'aire du triangle. $A = (b \times h) / 2$.



Si le triangle est rectangle, on forme un rectangle en plaçant deux triangles rectangles comme précédemment.
La formule est la même mais cette fois la base et la hauteur du triangle rectangle sont ses côtés.
L'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des longueurs de ses côtés perpendiculaires.



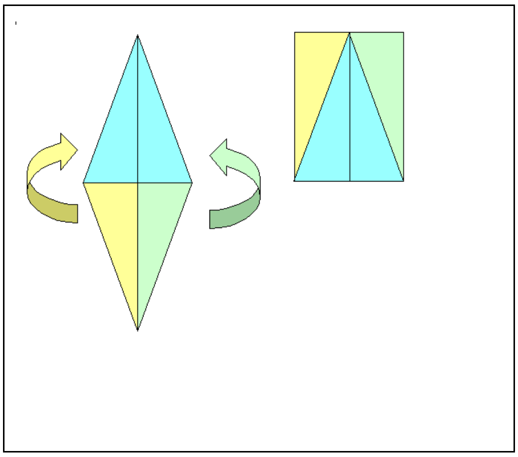
Aire du losange

On peut considérer qu'il s'agit d'un parallélogramme et utiliser pour le calcul de son aire la formule établie pour tout parallélogramme. II faut alors connaître la base et la hauteur correspondantes du losange.

Les diagonales du losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Lorsqu'on connaît leurs mesures, on peut calculer l'aire d'une autre façon.
En déplaçant les triangles inférieurs comme indiqué sur le dessin, on obtient un rectangle dont la base est égale à la moitié de la petite diagonale et la hauteur à la grande diagonale.

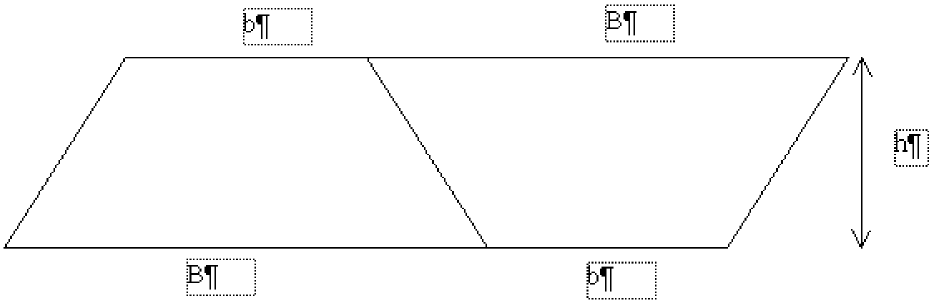
$$A=\frac{d}{2}\times D=\frac{d\times D}{2}$$

L'aire d'un losange est égale au demi-produit des longueurs de ses diagonales.
(On peut utiliser d'autres déplacements de triangles pour obtenir un rectangle.)



Aire du trapèze

En plaçant deux trapèzes égaux de hauteur h, de grande base B et de petite base b, comme sur le dessin on obtient un parallélogramme dont la hauteur est h et dont la base est B + b.



L'aire est égale au produit de la somme des deux bases par la hauteur. Si l'on veut connaître l'aire d'un seul trapèze, il suffit de diviser ce résultat par 2.

$$A=\frac{(B+b)\times h}{2}$$

Les surfaces et les mesures d'aire en classe

1. Notion de surface :

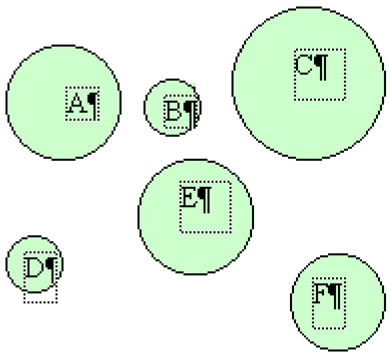
On cherche à déterminer ce qu’est une surface. Dans une discussion collective, les enfants exposent la conception qu’ils ont d’une surface.
Le maître la fait évoluer des réponses naïves avec un fort pouvoir évocateur telles que « C'est plat, on peut la toucher avec la main… » à la caractérisation pouvant être retenue comme définition mathématique :

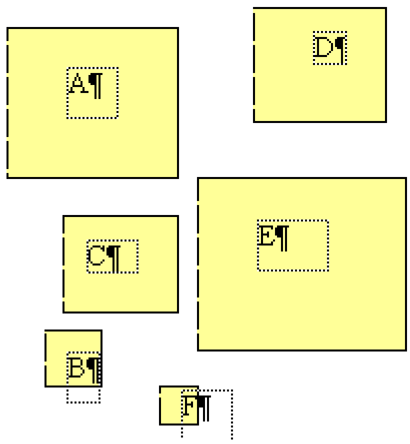
« Une surface est une portion de plan limitée par une ligne fermée. »

2. Comparaisons et classements :

2. 1. Comparaison de surfaces ayant la même forme

<u>2. 1. 1. Mise en groupe avec une feuille comportant différents disques coloriés et nommés.</u>





<u>Consignes</u> : découper, comparer, classer et expliquer sa méthode.

<u>2. 1. 2. Regroupement et rapport des groupes.</u>

- ⇨ Il y a des surfaces plus petites ou plus grandes.
- ⇨ Une surface est plus petite si elle peut rentrer entièrement dans l'autre.
- ⇨ Classement en faisant observer l’impossibilité de conclure pour deux des disques trop proches.

<u>2. 1. 3. Le lendemain, exercice individuel noté, avec des surfaces carrées.</u>

<u>Consignes :</u> Comparaison, classement et explication de la méthode employée.

2. 2. Comparaison de surfaces de forme différente.

Lors de cette activité, les enfants constatent que la comparaison directe de deux surfaces est souvent impossible, mais que certains découpages permettent de comparer ; elle est fondamentale pour faire comprendre les surfaces équivalentes, donc la notion d’aire.

<u>2. 2. 1. Mise en groupe avec une feuille comportant diverses surfaces et un tableau pour les résultats.</u>

<u>Consignes :</u> Comparaison et renseignement du tableau récapitulatif.

<u>2. 2. 2. Regroupement, rapport des groupes, levée des ambiguïtés et renseignement du tableau récapitulatif.</u>

- ⇨ Certaines surfaces sont directement comparables et l'on peut répondre.

- ⇨ D'autres peuvent l'être après observation et comparaison des parties qui dépassent.
- ⇨ Les dernières peuvent l'être après découpage en plusieurs morceaux.

2. 2. 3. Distribution du matériel individuel et trace écrite sur le cahier de géométrie.

2. 3. Comparaison de surfaces de forme différente par décomposition :

2. 3. 1. Mise en groupe avec une feuille comportant diverses surfaces carrées et rectangulaires.

Consigne : « Comparez et classez toutes les surfaces que je vous ai données ».
L'objectif est de rendre chaque enfant capable de comparer et de classer toutes ses surfaces.

2. 3. 2. Regroupement et rapport des groupes.

- ⇨ La méthode d'inclusion directe ne peut convenir.
- ⇨ Possibilité avec découpage et inclusion par morceaux.
- ⇨ Possibilité de comparer toutes les figures à l'aide de la plus petite (appelée « fortuitement » U).

2. 3. 3. Mise en groupe avec la feuille comportant les surfaces carrées et rectangulaires.

Consigne : exprimer toutes les surfaces en fonction de U.

2. 3. 4. Regroupement et rapport des groupes.

- ⇨ Notion d'unité de référence et de mesure.
- ⇨ Notion d'aire.
- ⇨ Égalité des aires de certaines surfaces alors qu'elles semblaient différentes.
- ⇨ Deux surfaces différentes peuvent avoir la même aire, la même mesure.

3. Encadrements d'aires calcul de l'aire moyenne :

Le travail se fait sur papier quadrillé. Il consiste à encadrer le plus précisément possible l'aire de surfaces irrégulières tracées sur le papier quadrillé.
Il est suivie de la correction collective au tableau, d'un réinvestissement en travail individuel sur cahier d'essais et d'un contrôle noté.

4. Règles de passage d'une unité à une autre :

4. 0. 1. Mise en groupe avec la feuille comportant les surfaces carrées et rectangulaires.

Consignes : Observer l'effet obtenu sur la mesure de la surface des carrés lorsqu'on fait varier la longueur du côté.

4. 0. 2. Regroupement et rapport des groupes.

Si le côté est multiplié par 2, alors l'aire est multipliée par 4.
Si le côté est multiplié par 3, alors l'aire est multipliée par 9.
Si le côté est multiplié par 5, alors l'aire est multipliée par 25.

4. 0. 3. Travail sur les quadrillages

Les élèves disposent feuille avec un quadrillage à petits carreaux (5 mm de côté) sur laquelle est tracé un carré de 1 décimètre de côté.
Le même travail est conduit au tableau avec un carré de 1m sur 1m.

- ⇨ Il faut 100 carrés de 1cm de côté pour remplir 1 carré de 1dm de côté.
- ⇨ Il faut 100 carrés de 1dm de côté pour remplir 1 carré de 1m de côté.

5. Unités légales et mesures agraires très utilisées.

5. 1. Définition du cm^2, du dm^2 et du m^2 puis, par extension, des autres unités.

Le centimètre carré (cm^2) est l'aire d'un carré d'un centimètre de côté.
Le décimètre carré (dm^2) est l'aire d'un carré d'un décimètre de côté.
Le mètre carré (m^2) est l'aire d'un carré d'un mètre de côté.

- ⇨ Pour bien faire comprendre qu'il s'agit de l'aire du carré et non de la figure elle-même, le maître donner des figures telles que des rectangles, des triangles, obtenus par découpage et recomposition du carré de référence. Il demande de trouver l'aire de ces figures.
- ⇨ Par dessin et découpage, les enfants observent qu'il faut 100 carrés de 1 cm de côté pour couvrir un carré de 1 dm de côté, 100 carrés de 1 dm de côté pour couvrir un carré de 1 m de côté, donc que 1 dm^2 = 100 cm^2, que 1 m^2 = 100 dm^2, que 1 m^2 = 10 000 cm^2.

5. 2. Emploi des unités appropriées à la surface à mesurer

Divers exemples sont proposés, pour lesquels les enfants doivent choisir une unité adaptée. Le critère d'adaptation retenu est d'avoir un nombre « parlant » devant l'unité.
Par exemple, on constate que si la classe mesure 8 m sur 5, c'est-à-dire 80 dm sur 50 dm ou 800 cm sur 500 cm, il est plus facile de dire que son aire est 40 m^2 plutôt que 4 000 dm^2 ou encore 400 000 cm^2.
Les questions peuvent ensuite porter sur des objets physiques que l'on peut se passer de mesurer réellement : la cour de l'école, le couloir, une table d'élève, le bureau du maître, une page de cahier, de carnet, un ticket… L'important est de montrer qu'il faut choisir l'unité d'aire puis exprimer les deux dimensions avec l'unité de longueur correspondante.
On prendra garde de ne pas proposer des dimensions qui conduisent au produit d'un décimal par un décimal. Par exemple, on peut demander quelle unité convient pour exprimer l'aire d'un tapis de couloir de 60 cm de large et 5 m de long. Si on choisit a priori le m^2, a multiplication $0,6\times5$ est faisable par des CM2 et donne une aire de 3 m^2. Par contre, les dimensions 0,6 m sur 4,8 m n'auraient pas permis ce calcul à l'école élémentaire.
Dans cet exemple, en confrontant entre eux les résultats obtenus avec les diverses unités de longueur possibles (m, dm, cm) on obtient trois mesures de la même aire, ce qui permet d'écrire l'égalité suivante : 3 m^2 = 300 dm^2 = 30 000 cm^2.

5. 3 Les unités agraires

Le maître donnera les définitions suivantes :
L'are est l'aire d'un carré d'un décamètre de côté.
L'are est un autre nom pour le décamètre carré : 1 a = 1 dam^2.
Le centiare est le centième de l'are : 1 ca = 0,01 a.
L'hectare est égal à 100 ares : 1 ha = 100 a.
Le maître fera observer les correspondances suivantes :

1a = 100 m^2, 1 ha = 1 hm^2, 1 km^2 = 100 ha.

Il fera aussi remarquer que dans « centiare » ou « hectare », les préfixes « centi » et « hecto » ont leur signification habituelle.

5. 4 Aires du rectangle, du carré, du disque

5. 4. 1. Mise en groupe avec une feuille comportant des surfaces carrées et rectangulaires.

Les enfants ne connaissent pas encore les règles de calcul et les formules rappelées dans la partie mathématique ; il s'agit précisément de les leur faire percevoir.
Le maître distribue des carrés et des rectangles dessinés sur du papier quadrillé en cm. Il peut utiliser du quadrillage de 5 mm mais cela peut gêner les enfants ; il est préférable de réaliser soigneusement un quadrillage avec des carreaux d'un cm de côté et photocopier cette page

comme support des dessins qu'il distribue. S'il a un logiciel de dessin vectoriel et une bonne imprimante, il lui est conseillé d'utiliser ces outils.

Consignes : Observez le côté et l'aire des différents carrés.
Observer l'aire des différents rectangles par rapport à leur longueur et largeur.
Découvrir la formule de calcul de l'aire du carré et de l'aire du rectangle.

6. 0. 2. Regroupement et rapport des groupes

Le but de cette phase est de faire dégager des méthodes de calcul que l'on traduit par des formules.

- ⇨ Carré : $A = c \times c = c^2$.
  La convention d'écriture avec l'exposant n'est pas indispensable.
- ⇨ Rectangle : $A = L \times l$.

6. 0. 3. Faire admettre la formule pour le disque

Le maître donne sans explication la formule $A = \pi \times R \times R$ et éventuellement la convention d'écriture $A = \pi \times R^2$.

Une justification argumentée est hors de portée d'enfants de CM. Toutefois, il est intéressant, avant de donner la règle et la formule, de faire encadrer l'aire du disque par celle de deux carrés, comme indiqué par la figure ci-dessous.

Le carré intérieur (inscrit dans le cercle) se transforme aisément en un rectangle formé de deux carrés de côté R.
On commencera par donner un cercle de rayon unité, puis un cercle de rayon quelconque.
Ce travail nécessite une bonne connaissance par les enfants de l'aire du carré.
Le disque semble être « à moitié entre le petit carré (d'aire $2R^2$) et le grand (d'aire $4R^2$) », ce qui rend plausible une valeur proche de $3R^2$; la formule $A = \pi \times R^2$ est ainsi plus facile à comprendre.