Concours de recrutement de professeur des écoles session 2014, groupement académique 1

Corrigé non officiel de la deuxième épreuve d'admissibilité proposé par http ://primaths.fr

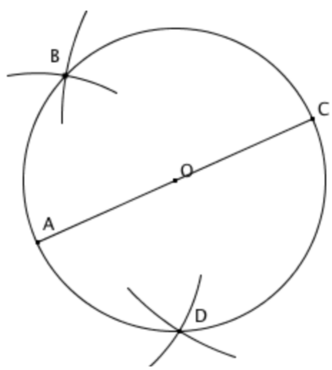
Première partie

A Chez les Mayas

1. Un carré est partagé par une de ses diagonales en deux triangles rectangles isocèles superposables. Si on utilise la diagonale commune comme base pour le calcul de l'aire d'un de ces triangles, alors la hauteur est une demi-diagonale, et l'aire d'un des triangles est donc$\frac{D\times\frac{D}{2}}{2}$.
   L'aire du carré, somme des aires des deux triangles, est donc égale à $\frac{D\times D}{2}$.
   Remarque : on peut aussi utiliser le fait que dans un carré de côté a, les diagonales mesurent $a\sqrt{2}$. la formule maya donne alors $\frac{a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}}{2}$ soit a^2, elle donne bien l'aire exacte du carré.
2. Deux côtés et une diagonale du rectangle considéré forment un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm. L'hypoténuse de ce triangle (la diagonale du rectangle) mesure alors 5 cm. L'application de la formule maya donne $\frac{5\times 5}{2}$soit 12,5. Ce n'est pas la valeur exacte de l'aire de ce rectangle qui est de 12 cm^2.

B Chez les indiens

1. Etude d'une configuration particulière



   (a) Notre construction utilise le fait que si D est symétrique de B par rapport à (AC), alors AB = AD et CB = CD. De nombreuses autres constructions sont possibles, notamment en traçant la perpendiculaire à (AC) passant par B.

   (b) Les points A, B et C sont par définition sur le cercle Γ, il suffit donc de prouver que D est aussi sur ce cercle.
   Dans la symétrie d'axe (AC), D est le symétrique de B et le point O, centre du cercle, est son propre symétrique. Il en résulte que les segments [OB] et [OD] sont symétriques, ils ont donc la même longueur. Par conséquent, le point D est situé sur le cercle de centre O et passant par B, qui n'est autre que Γ.
   Autre démonstration : B est sur le cercle de diamètre [AC] donc le triangle ABC est rectangle en B. De plus, D est le symétrique de B par rapport à (AC) donc le triangle

ACD est rectangle en D. Il en résulte que D est sur le cercle de diamètre [AC].

Remarque : D étant sur le cercle, un seul des deux arcs de cercles que nous avons tracés à la question (a) est nécessaire pour sa construction. De même, si on utilise la perpendiculaire à (AC) passant par B, le point D est l'autre intersection de cette droite avec le cercle. Ces constructions sont correctes mais s'appuient sur une propriété qui n'est démontrée que dans la question b, nous ne les conseillons donc pas car leur validité risque d'être mise en cause si la preuve fournie à la question (b) est erronée.

(c) D est symétrique de C par rapport à (AB) donc AD=AC et BD=BC. On en déduit que le demi périmètre de ABCD est égal à AB+BC. L'application de la formule de Brahmgupta donne alors :
$S = \sqrt{BC \times AB \times BC \times AB}$ soit $BC \times AB$.

(d) B est sur le cercle de diamètre [AC], le triangle ABC est donc rectangle en B. L'aire de ce triangle est alors égale à $\frac{BC \times AB}{2}$. ABC et ADC étant symétriques, leurs aires sont égales, par conséquent l'aire de ABCD est le double de celle de ABC, elle est égale à $BC \times AB$.

2. Etude d'une autre configuration particulière, le rectangle.

   (a) Les diagonales d'un rectangle ont le même milieu et la même longueur, par conséquent tous les sommets du rectangle sont situés à la même distance de l'intersection des diagonales, ils sont donc sur un même cercle dont le centre est l'intersection des diagonales.

   (b) Le demi périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l est égal à L+l. La formule de Brahmaputra fournit alors le résultat suivant : $S = \sqrt{L \times l \times L \times l} = \sqrt{L^2 \times l^2} = L \times l$.

C À l'ère du tableur

1. Le graphique se limite à des valeurs de x comprises entre 0 et 7 parce que les longueurs des côtés d'un rectangle de périmètre 14 cm sont dans cet intervalle (une mesure de longueur est positive, et si un côté mesurait plus de 7 cm, le périmètre serait supérieur à 14 cm).

2. Étude graphique

   (a) Un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm^2 a des dimensions de 2 cm et 5 cm *(la parallèle à l'axe des abscisses correspondant à la valeur 10 cm^{2}coupe la courbe en deux points, les dimensions cherchées sont les abscisses de ces deux points).*

   (b) La valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est maximale est comprise entre 3 et 4.

   (c) L'aire maximale du rectangle, en centimètres carrés, est comprise entre 12 et 13.

3. Poursuite de l'étude à l'aide d'un tableur

   (a) La formule « =B1*(7-B1) » permet d'obtenir les valeurs souhaitées.

   (b) La courbe suggère que la valeur de l'aire augmente quand x augmente jusqu'à une certaine valeur et qu'elle diminue ensuite. En supposant que cela est vrai, le tableau permet d'affirmer que la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale est comprise entre 3,4 et 3,6. La valeur de l'aire maximale est alors proche de 12,25 *(supérieur ou égale à 12,25).*

4. Détermination des valeurs exactes

(a) Transformons l'expression fournie.
$\frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} - \left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) = 7x - x^2 = x\,(7 - x)$
Or, si un rectangle a pour périmètre 14, son demi périmètre est 7, si l'une de ses deux dimensions est x l'autre est donc $7-x$, l'expression donnée calcule bien l'aire du rectangle, c'est à dire $A(x)$.

(b) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ étant un carré, sa valeur est positive ou nulle. Par conséquent la valeur maximale de $\frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ est atteinte quand $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0$ c'est à dire quand $x = \frac{7}{2}$.
L'aire $A(x)$ est maximale quand $x = \frac{7}{2}$ sa valeur est alors $\frac{49}{4}$ soit 12,25.

(c) Parmi les rectangles de périmètre 14 cm, celui qui a la plus grande aire a des côtés de 3,5 cm, c'est donc le carré de 3,5 cm de côté.

Deuxième partie

Exercice 1

1. L'étendue est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale, par conséquent la valeur maximale de la durée est égale à la valeur minimale plus l'étendue, elle est de 16,7 minutes.
2. La moyenne des 200 performances étant de 15,4 minutes, leur somme est de $15,4 \times 200$ soit 3080 minutes.
3. Ariane est arrivée treizième, elle est donc dans le premier quart, sa performance est donc comprise entre 12,5 minutes et 14,8 minutes.
4. La moitié des élèves ont mis un temps supérieur à la médiane qui est de 15,7 minutes, donc plus de la moitié des élèves ont mis un temps supérieur à $15,4$ minutes, qui est la moyenne, l'affirmation est vraie.

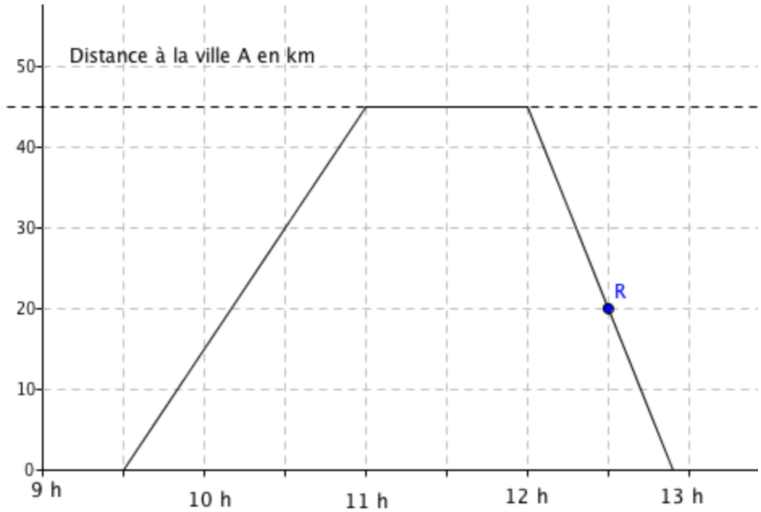
Exercice 2

1. Notons n le troisième des 5 nombres entiers consécutifs. Leur somme est alors égale à$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)$ c'est à dire à 5n. L'affirmation 1 est donc vraie.
2. En traçant les deux diagonales issues d'un même sommet du pentagone, on constate que celui ci est partagé en trois triangles, et que la somme des angles du pentagone est la somme des angles des trois triangles. Or la somme des angles d'un triangle est de 180°, l'affirmation 2 est donc vraie.
3. Prenons comme exemple une (vaste) maison carrée de 50 m de côté. Son aire est de $2500m^2$. Sa réprésentation sur le plan est un carré d'un mètre de côté, son aire est $1m^2$. L'affirmation 3 est donc fausse.
Remarque : on peut aussi utiliser un résultat connu : dans un agrandissement ou une réduction de coefficient k, les aires sont multipliées par k^2, ce qui contredit l'affirmation 3.
4. En posant la division euclidienne de 1001 par 7, on trouve que $1001 = 143 \times 7$. Shéhérazade lira donc un nombre entier de semaines. Elle terminera donc bien un dimanche soir, l'affirmation 4 est vraie.

Remarque, nous fournissons ci-dessus la réponse probablement attendue, mais si on prend au sérieux le contexte indiqué il semble plus probable que la lecture se termine à la fin d'une nuit commençant un dimanche soir... c'est à dire un lundi matin.

Exercice 3

1. A la vitesse constante de 30 km/h, il faut une heure et demi pour parcourir 45 km. Le cycliste arrive donc à B à 11 h et en repart à midi.

2. 

   Ce graphique a été construit en utilisant le point R qui indique qu'une demi heure après son départ de B, le cycliste a parcouru 25 km et n'est donc plus qu'à 20 km de A.

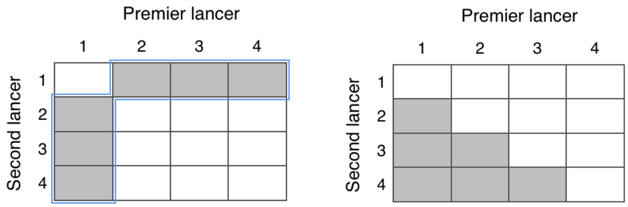
3. à 50 km/h, on parcourt 5 km en 1/10 d'heure, soit en 6 minutes. On parcourt donc 45 km en 1 h - 6 min soit 54 min.
   Le cycliste est donc de retour à A à 12h 54 min.
   Remarque : il n'est pas précisé si l'heure d'arrivée doit être lue sur le graphique ou doit résulter d'un calcul. Nous pensons plus sûr d'utiliser un calcul (comment seront traitées les réponses approximatives trouvées à partir du graphique ?).

Exercice 4

1. Le dé étant supposé équilibré, les probabilités d'obtenir 1 et d'obtenir 3 sont égales, elles ne varient pas en fonction des tirages précédents.

2. On lance le dé deux fois de suite.

   (a) Le tableau de gauche montre tous les cas que l'on peut obtenir en lançant le dé deux fois de suite. Les cases où on obtient une seule fois le nombre un sont grisés. On constate qu'il y a 6 cas favorables sur 16 cas en tout, la probabilité est donc de 6/16 ou 3/8.



(b) Sur le tableau de droite, on a grisé les cases où le nombre obtenu au deuxième lancé est strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancé. Il y en a 6, la probabilité est à nouveau de 6/16 ou 3/8.

Troisième partie

Exercice 1

1. Citer deux compétences mathématiques travaillées lors de ce jeu.
   Première compétence : savoir dénombrer une petite quantité c'est à dire indiquer combien elle comporte d'objets (de un à six).
   Deuxième compétence : savoir comparer deux nombres (savoir que 6 c'est plus que 4, ou que 4 c'est plus que 3).
2. Deux causes d'erreurs possibles pour le dénombrement :
   Erreur d'énumération : si l'élève compte les dessins figurant sur la carte un à un, il peut en oublier un, ou prendre en compte deux fois le même.
   Erreur liée à une méconnaissance de la comptine numérique : l'élève peut par exemple dire « un, deux, trois, quatre, six ».

   Deux causes d'erreurs possibles pour la comparaison :
   La taille des objets peut causer des erreurs, par exemple un élève peut juger que les 6 carrés de la rangée du haut, c'est plus que les 6 carrés de la rangée du bas parce qu'ils sont plus grands.
   La disposition des éléments peut également causer des erreurs, par exemple les deux dispositions de 5 et 6 rectangles suivant une diagonales de la carte peuvent être perçues comme identiques.
   Remarque : les erreurs de comparaison peuvent également être une conséquence d'erreurs de dénombrement.
3. Le deuxième jeu de carte présente deux différences essentielles par rapport au premier :
   Les éléments de chaque carte ont tous des dimensions à peu près identiques.
   Ces éléments sont disposés comme les points du dé ordinaire.

   Intérêt concernant le dénombrement.
   Dans le deuxième jeu, on peut déterminer le nombre d'éléments d'une carte en reconnaissant la configuration : « c'est comme le 5 du dé ». Le dénombrement par comptage des éléments n'est jamais nécessaire alors qu'il l'est pour certaines cartes du premier jeu. De ce point de vue, les deux jeux sont complémentaires car les deux types de dénombrement sont utiles.

   Intérêt concernant la comparaison des quantités.
   Le deuxième jeu permet d'observer des décompositions des nombres : cinq est par exemple

formé avec la configuration quatre à laquelle on rajoute un point au centre. 5 c'est 4 et encore 1, c'est plus que 4. Ce type de remarque est favorable aux débuts du calcul. Dans le premier jeu, on sera plutôt conduit à mettre en évidence que si on poursuit la comptine plus loin, il y a plus d'objets : cinq c'est plus que trois parce que cinq est après trois dans la comptine. Cette compétence est également utile et les deux jeux sont là encore complémentaires.
Seule la taille variable des éléments dans le jeu un ne nous semble pas présenter d'intérêt. En effet, cet élément introduit une ambiguïté inutile dans la consigne : un enfant qui jugerait que deux gros points c'est plus que six petits n'apprendra rien sur les nombres parce qu'il n'a pas compris que ce jeu porte sur les nombres.
Remarque : Je souhaite beaucoup de courage aux correcteurs...

Exercice 2

Partie A

1. L'élève A semble interpréter chaque nombre décimal comme « un entier plus un certain nombre de petits bouts ». Il effectue donc deux additions séparées de chaque côté de la virgule pour calculer d'une part la somme des entiers, d'autre part le nombre total de « petits bouts ».
   Il semble maîtriser le calcul de somme de petits entiers (8+3=11 ; 3+12=15) mais n'a pas compris le sens de l'écriture à virgule des nombres décimaux : il faut qu'il apprenne que tous les « petits bouts » n'ont pas la même taille, et que la place des chiffres indique cette taille (dixième, centième...). Il faut également qu'il prenne conscience qu'avec un certain nombre de petits bouts on peut obtenir un entier (dix dixièmes ou cent centièmes, c'est un).
2. Analyse de la réponse de l'élève B
   (a) L'élève B peut interpréter l'écriture 5,100 comme « 5 et 100 petits morceaux » dans savoir interpréter la taille des morceaux en question. Dans cette conception, il est cohérent de considérer que « 5 et 100 petits morceaux » est plus grand que « 5 et 6 petits morceaux ».
   (b) Désigner oralement 5,03 comme « cinq et trois centièmes » ou comme « cinq, zéro dixième et trois centièmes » (et non « cinq virgule zéro trois ») et 5,6 comme « cinq et 6 dixièmes » peut aider les élèves à se construire une bonne représentation de décimaux.

Remarque : il est classique de dire que A et B considèrent un nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers, mais il nous semble que la description que nous utilisons ci-dessus est plus proche de ce que les élèves pensent généralement.

Partie B

1. L'écriture 3,12 signifie $3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$, on appelle cela un nombre décimal.
   Remarque : cette définition passe sous silence le fait que si 3,12 est une autre façon d'écrire $3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$, *alors* $3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ *est lui même un nombre décimal.*
2. Dans l'exercice du cadre 5 figurent en regard de la même graduation les écritures 5/10 et 0,5. L'enseignant peut utiliser cette double écriture du même nombre pour montrer que 0,5 + 0,5 c'est 5 dixièmes plus 5 dixièmes, c'est à dire 10 dixièmes ou encore 1.
3. En CM2, les élèves connaissent l'algorithme de l'addition de deux décimaux. La question de l'élève (*question tout-à-fait exceptionnelle*) fait donc probablement référence au cas où la somme de deux décimaux est un entier. Il s'agit donc de dire si un entier est ou non un

décimal.
La réponse mathématique est oui, mais il est d'un usage fréquent à l'élémentaire d'utiliser « nombre décimal » dans le sens de « nombre à virgule », c'est à dire décimal non entier. Il nous semble que cet usage abusif n'est pas très gênant mais que, si la question est explicitement posée par un élève, il convient de lui apporter une réponse mathématiquement correcte : les nombres entiers font partie des décimaux.
L'enseignant peut justifier ce point de vue par le fait que $3 = 3 + 0/10$ et peut donc se coder 3,0.

4. Ce prolongement permet de prendre conscience (ou de rappeler) que :
   $1/10$ c'est $10/100$, pour graduer la droite de centième en centième, il faut donc partager en 10 parties égales les intervalles entre deux graduations en dixièmes.
   1,07 (ainsi que tous les nombres dont l'écriture commence par 1,0. . .) est compris entre 1 et 1,1.