Concours de recrutement de professeur des écoles, Avril 2015
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques
Groupement académique 3

Première partie (13 points)

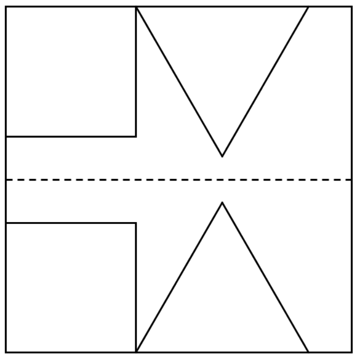
Bien que ce ne soit pas l'objet du problème, nous ne pouvons nous empêcher de faire remarquer l'extrême pauvreté de la situation « de découverte des formes géométriques » servant de support. Que peut-on « découvrir » en découpant collant et coloriant un disque un carré et un triangle équilatéral ?

A. Etude de la situation concrète.

1. a) Le point à éclaircir concerne la hauteur des triangles équilatéraux : si elle est inférieur ou égale à 3,5 cm il est possible de réaliser la disposition du schéma, sinon c'est impossible. Calculons cette hauteur à partir de la formule fournie : $h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \quad = \quad 2\sqrt{3} \quad < \quad 3{,}47$
Il est donc possible de réaliser la disposition indiquée.

b) L'aire du carré mesure $9cm^2$
Le triangle équilatéral a une hauteur inférieure à 3,5 cm, son aire est donc inférieure à $\frac{4 \times 3{,}5}{2} cm^2$ c'est à dire à $7cm^2$. Les aires des deux figures ne sont donc pas égales.

2. *Quelques remarques préalables sur cette question.*
Tout d'abord, l'expression « dans la disposition de la figure 2 » est ambigüe. Les carrés et les triangles de la figure ci-contre sont-ils par exemple « dans la disposition de la figure 2 » ? Autrement dit, le concept de disposition implique t'il que la somme des longueurs du carré et du triangle soit 7 cm ?



Si la réponse est non, il est évident qu'il y a plusieurs solutions : en appliquant au carré et au triangle de la question 1 une même réduction, on obtient un carré et un triangle ayant le même périmètre et qui conviennent donc.

Si la réponse est oui (ce qui est l'option des auteurs du sujet), il est évident que seule la solution de la question 1 convient.
En effet, pour que la somme des longueurs d'un côté de carré et un côté de triangle reste égale à 7 cm, il y a deux possibilités : allonger le côté du carré en réduisant celui du triangle, ou bien réduire le côté du carré en allongeant celui du triangle. Dans les deux cas les périmètres, qui étaient égaux au départ, ne le sont plus.

On s'étonnera donc qu'on juge utile d'infliger aux candidats un système de quatre équations et inéquations pour répondre à une telle question. Ce n'est pas anodin : à l'heure où on déplore les faibles résultats en mathématiques des jeunes français, est-il bien judicieux de proposer aux futurs enseignants une vision des mathématiques où l'essentiel est d'utiliser des outils et des notations sophistiquées… même quand elles n'apportent rien à la question qu'on prétend étudier.

Fin de la rubrique protestation et reprise du corrigé.
Les candidats auront compris que les parties en italique de ce corrigé n'étaient pas attendues de leur part.

a) Si x et y sont solutions du problème, alors :
- Le périmètre du carré et celui du triangle sont égaux, ce qui se traduit par la première équation.
- La somme des longueurs d'un côté du carré et un côté du triangle est de 7 cm (seconde équation).
- Deux carrés tiennent sur un même côté du grand carré de 7 cm (première inéquation).
- La somme des longueurs de deux hauteurs du triangles est inférieure à 7 cm (seconde inéquation).

b) l'équation $4x - y = 0$ est équivalente à $y = \frac{4}{3}x$. Si on pose $y = f(x)$, on constate que la droite D, représentation graphique de la fonction f, représente les solutions de l'équation $4x - y = 0$.
De même, les solutions de l'équation $x + y = 7$ sont représentées par la droite Δ.

Le système constitué des deux équations admet donc une seule solution : $x = 3$ et $y = 4$, représentée par l'intersection des deux droites. Il n'est donc pas possible de choisir d'autres dimensions.

c) Le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 3y = 21 \end{cases}$
En additionnant membre à membre les deux équations de ce système, on obtient $7x = 21$ d'où $x = 3$.
En reportant ensuite cette valeur de x dans l'équation $x + y = 7$ on trouve que $y = 4$.
La solution de ce système est : $x = 3$ et $y = 4$.

Il n'y a donc bien que les dimensions fournies dans la première question qui conviennent.

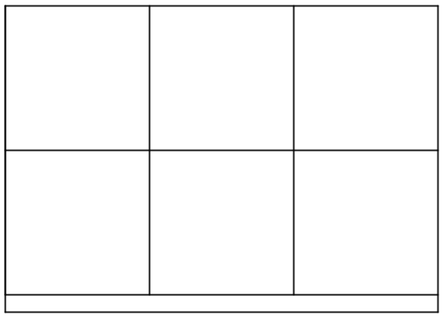
3.
Le carré dont disposera chaque élève a une aire de 19600 mm^2 (140×140).
Le rectangle dont disposera chaque élève a une aire de 2450 mm^2 (35×70).

L'aire totale des cartons nécessaires pour les 25 élèves est donc de $25 \times (19600 + 2450)$ soit 551250 mm^2

L'aire d'une feuille A3 est de 420×297 soit 124740 mm^2.

L'aire de 4 feuilles A3 est inférieur à $4 \times 125000 mm^2$ soit à 500000 mm^2. Il n'est donc pas possible de découper les figures nécessaires dans 4 feuilles A3.

On peut découper 6 carrés de 14 cm de côté dans une feuille A3, par exemple en utilisant la disposition ci-contre.
Avec 4 feuilles A3 on peut donc obtenir 24 carrés.
Un carré de 14 cm de côté peut être découpé en 8 rectangles de 7 cm sur 3,5 cm. Dans la cinquième feuille, on pourra donc reprendre le même dessin puis partager 4 des carrés en 8 rectangles chacun.
On disposera alors de 26 carrés et 32 rectangles, c'est plus qu'il n'en faut.



Conclusion : Le professeur doit prévoir au moins 5 feuilles A3.

Remarque : Avec 5 feuilles A3, on dispose d'une aire totale suffisante (supérieure à 600000 mm^2), mais cela ne suffit pas à prouver qu'on peut découper les figures nécessaires.
Imaginons par exemple un ruban de 6000 mm de long et 100 mm de large, son aire est de 600000 mm^2, on ne peut pourtant découper aucun carré de 14 cm de côté dans ce ruban. Une solution correcte nécessite donc de montrer qu'il est possible de découper réellement les morceaux demandés.

B. Démonstration de résultats mathématiques.

1. Dans un triangle équilatéral, les hauteurs sont aussi des médianes. un triangle équilatéral de côté de mesure *a* et de hauteur *h* est donc partagé par une de ses hauteurs en deux triangles rectangles dont l'hypothénuse mesure *a* et les côtés de l'angle droit *h* et *a/2.*

En appliquant le théorème de Pythagore à l'un de ces triangles rectangles, on obtient :

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ d'où $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$ et enfin $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. a) Le périmètre du carré est $4x$, celui du triangle est $3y$, soit $3 \times \frac{4}{3}x$ ou $4x$. Les deux figures on bien le même périmètre.

b) L'aire A_1 du carré est égale à x^2.

La hauteur du triangle mesure $\frac{y\sqrt{3}}{2}$ soit $\frac{\frac{4}{3}x\sqrt{3}}{2}$ qu'on peut simplifier en $\frac{2}{3}x\sqrt{3}$

L'aire A_2 du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}x \times \frac{2}{3}x\sqrt{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{3}\,x^2$

Le rapport $\frac{A_2}{A_1}$ est donc égal à $\frac{4}{9}\sqrt{3}$. Ce nombre n'est pas égal à 1 (il vaut environ 0,77), les deux aires ne sont donc pas égales.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

1. Le vététiste a parcouru 27 km en 1h 30 min. À la même vitesse, il parcourrait 9 km en 30 min (trois fois moins) donc 18 km en une heure. Sa vitesse moyenne était de 18 km/h.

2. Le vététiste a, cette fois, parcouru 28 km en 1 h 45 min, soit en 7 quarts d'heure. Il parcourrait donc 4 km en un quart d'heure, et 16 km en une heure. Sa vitesse moyenne est de 16 km/h.

Sa vitesse moyenne est passée de 18 km/h à 16 km/h. elle a donc été multipliée par $\frac{16}{18}$ soit environ 0,889.
Sa nouvelle vitesse est donc environ 88,9% de l'ancienne, la diminution est proche de 11,1%.

Exercice 2

1. Si on suspend une masse de 70 g, le ressort du peson s'allongera de 7 fois 0,5 cm, soit 3,5 cm. Sa longueur totale sera alors de 14 cm + 3,5 cm soit 17,5 cm.

2. Si le ressort mesure 28 cm, il s'est allongé de 14 cm soit $28 \times 0{,}5cm$ ce qui correspond à une masse de 280 g.

3. Si la longueur du ressort était proportionnelle à la masse suspendue, elle serait nulle pour une masse nulle. Ce n'est pas le cas donc ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles.

Exercice 3

1. La valeur approchée de $\frac{p}{q}$ au millième près par excès est 1,118 donc $1{,}117 < \frac{p}{q} \leq 1{,}118$

On en déduit que $p > 1{,}117 \times 1789$; $p > 1998{,}313$ et que $p \leq 1{,}118 \times 1789$; $p \leq 2000{,}102$
Les valeurs possibles de p sont donc 1999 et 2000.

2. a)

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6} \quad et \quad \frac{2}{3}=\frac{4}{6} \quad donc \quad \frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{13}=\frac{12\times 14}{13\times 14}=\frac{168}{13\times 14} \quad et \quad \frac{13}{14}=\frac{13\times 13}{13\times 14}=\frac{169}{13\times 14} \quad donc \quad \frac{12}{13}<\frac{13}{14}$$

$$\frac{176}{177}=\frac{176\times 178}{177\times 178}=\frac{31328}{177\times 178} \quad et \quad \frac{177}{178}=\frac{177\times 177}{177\times 178}=\frac{31329}{177\times 178} \quad donc \quad \frac{176}{177}<\frac{177}{178}$$

Au vu de ces trois résultats, on peut conjecturer que pour tout n entier naturel non nul $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$.

b. $\frac{n-1}{n}=\frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)}=\frac{n^2-1}{n(n+1)} \quad et \quad \frac{n}{n+1}=\frac{n^2}{n(n+1)} \quad donc \quad \frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$

c. Si on note n l'entier 987654322, la première fraction proposée est égale à $\frac{n}{n+1}$, la seconde à $\frac{n-1}{n}$.
En application de la question précédente, la première fraction est donc plus grande que la seconde.

Exercice 4
Le tableau ci-dessous représente tous les tirages possibles et équiprobables, ils sont au nombre de 24.

	1	2	3	4	5	6
rouge				X		
bleu						
jaune	O		O		O	
jaune	O		O		O	

1. L'unique tirage correspondant à rouge sur un dé et 4 sur l'autre est marqué d'un X dans le tableau, sa probabilité est de 1/24.

2. Le tableau montre que 6 tirages répondent aux conditions « jaune » et « impair », la probabilité est donc de 6/24, soit 1/4.

Troisième partie (14 points)

Situation 1

1. L'opération enjeu de ce problème est la division euclidienne.

2. L'élève A a déterminé mentalement le nombre total de passagers. Il représente ensuite les bus par des rectangles dans lesquels 42 traits représentent les passagers et, après chaque rectangle, calcule par une soustraction le nombre de passager qu'il reste à placer. Il conclut correctement.

L'élève B, après avoir déterminé le nombre total de passagers en posant l'addition, effectue des essais de multiplications de 42 par 3, puis 4 et 5. Cela lui permet de constater que 4 bus ne suffisent pas et que 5 bus conviennent. Il conclut correctement.

L'élève C utilise une solution qu'on peut qualifier d'experte. Après avoir calculé le nombre total de passagers, il pose la division euclidienne par 42 et l'interprète correctement : le quotient indique le nombre de bus qu'on peut remplir, et comme le reste n'est pas nul, le nombre de bus nécessaire est un de plus que le quotient euclidien. Il conclut correctement.

L'élève D a calculé mentalement le nombre total de passagers. Il effectue des additions réitérées de 42 (chacun des nombres 42 étant accompagné d'un rectangle figurant probablement un bus). Quand il parvient à une somme égale à 168 (proche de 177) il détermine mentalement le nombre de personnes présentes dans le cinquième bus si les 4 premiers sont remplis et conclut correctement, probablement en s'appuyant sur ses dessins pour déterminer le nombre de bus.

3. Une question pourrait être : Comme il y a 20 adultes, les élèves sont répartis en 20 groupes, combien d'élèves y a-t-il dans chaque groupe ?
Toutefois, les effectifs ne pouvant pas être tous égaux, l'interprétation correcte du quotient et du reste de la division serait difficile.

4. La situation de départ s'appuie sur le sens « groupement » de la division : combien de groupes de 42 unités peut on faire avec 177 unité ?
La situation de la question 3 s'appuie sur le sens « partage » : on partage 177 unités en 20 groupes égaux, combien d'unités contient chaque groupe ?

Situation 2

1. L'opération qui permet de répondre à cette question est la division. Il ne s'agit plus de division euclidienne, mais d'une division avec quotient décimal.

2. L'élève E semble avoir dessiné un segment partagé en 28 parties égales représentant chacune un litre d'essence. Il dessine ensuite 8 groupes de 3 segments, indiquant ainsi qu'il est possible de placer 3 litres d'essence dans chaque bidon. Chacun des 4 segments restants est ensuite partagé en deux parties, les petits segments obtenus représentent des demi-litres, dont chacun est affecté à un bidon comme le montrent les grandes courbes. Les écritures 2+1/2, 3+1/2… ne désignent donc probablement pas des quantités, 3+1/2 signifie probablement « j'ajoute 1/2 litre au bidon numéro 3 ». Il conclut correctement.

L'élève F s'appuie sur un schéma dont chaque case rectangulaire représente un bidon. Il peut écrit des 1 signifiant « 1 litre d'essence » ligne par ligne jusqu'à constater, après trois lignes complètes, qu'il a distribué 24 litres et qu'il en reste 4 à distribuer. Il aurait alors pensé que 4 litres = 8 demi-litres et poursuivi sa distribution sur le schéma. Il conclut correctement.

L'élève G utilise la procédure qu'on peut qualifier d'experte : il pose correctement la division de 28 par 8 avec un quotient décimal et conclut correctement.

Situation 3

1. Cet exercice relève essentiellement de la notion de proportionnalité.

2. Première solution : 7 litre, c'est quatre fois moins que 28 litres, on pourra donc remplir 4 fois moins de bidons, c'est-à-dire 2 bidons.

Deuxième solution : Si avec 28 litres on remplit exactement 8 bidons, chaque bidon contient 3,5 litres (par exemple en posant la division comme l'élève G). Or 7 est le double de 3,5. On peut donc remplir exactement 2 bidons.

Remarque : la procédure dite « règle de trois » étant enseignée à l'école élémentaire, on peut s'attendre à ce que des élèves pensent à l'utiliser, ce qui donnerait :
Avec 28 litres on remplit 8 bidons, avec 1 litre on en remplit donc 28 fois moins soit 8 : 28
Avec 7 litres on en remplit 7 fois plus soit $(8 : 28) \times 7$.
À partir de là, soit l'élève tente d'effectuer le calcul dans l'ordre indiqué et il ne parviendra pas à la solution car la division de 8 par 28 n'a pas de quotient décimal exact, soit il sait que l'ordre des opérations n'importe pas et qu'il peut effectuer $(8\times7):28$ *, ce qui n'est pas très facile à justifier à ce niveau mais permet de conclure.*

Situation 4

1. Il s'agit d'une situation de partage

2. Pour travailler avec des nombres entiers, il suffit d'exprimer la longueur en mm, et de poser la division de 1376 par 8 dont le quotient exact est 172. La longueur de chaque morceau est donc de 172 mm.

3. La division d'un nombre décimal par un nombre entier est au programme de cycle 3 (les indications de répartition par année du cycle proposent cette compétence pour le CM2). On peut donc attendre d'un élève de fin de CM2 qu'il pose cette opération, par exemple dans la présentation ci-dessous.

4. Oui, le quotient d'un décimal par 8 est toujours un décimal.
Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.
Considérons un décimal écrit sous cette forme, notons n son numérateur et 10^a son dénominateur.
Divisons ce décimal par 8.
$\frac{n}{10^a}:8=\frac{n}{10^a\times8}=\frac{125n}{10^a\times8\times125}=\frac{125n}{10^a\times1000}=\frac{125n}{10^{a+3}}$ ce qui est bien l'écriture d'un nombre décimal.

Autre version : pour diviser un décimal par 8 on peut le multiplier par 125, ce qui donne un décimal, puis le diviser par 1000 ce qui donne encore un décimal.