Concours de recrutement de professeur des écoles, Avril 2016
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques
Groupement académique 2

Première partie (13 points)

A : lectures graphiques

1. Selon le graphique, un angle de 30° correspond à une focale d'environ 67 mm.
2. Selon le graphique, une focale de 100 mm correspond à un angle légèrement supérieur à 20°.
3. Un objectif dont la focale est comprise entre 55 mm et 200 mm permet d'obtenir un angle de champ compris entre environ 10,5° et environ 36°.

B : prises de vue dans un théâtre

1.

a. Selon la formule fournie par l'énoncé, on a :

$$\frac{12000}{35}=\frac{L}{36}+1 \quad ; \quad \frac{12000}{35}-1=\frac{L}{36} \quad ; \quad \frac{11965}{35}=\frac{L}{36} \quad ; \quad L=\frac{36\times 11965}{35}$$

La largeur L de la scène photographiée est d'environ 12306 mm soit, en arrondissant au dixième de mètre, d'environ 12,3 m.

b. Calculons pour commencer la focale correspondant à une largeur de 15 m.

$$\frac{12000}{f}=\frac{15000}{36}+1 \quad ; \quad \frac{12000}{f}=\frac{15036}{36} \quad ; \quad f=\frac{12000\times 36}{15036} \quad ;$$

La focale correspondant à une largeur de scène de 15 m est d'environ 28,7 mm.

Le graphique montre que pour augmenter l'angle de champ α (donc la largeur L) il faut diminuer la focale. Le photographe peut donc utiliser toutes les focales inférieures à 28,7 mm.

2. Si la scène ne varie pas (et qu'on ne change pas d'appareil) les longueurs L et *l* ne varient pas, la formule fondamentale indique alors que le rapport $\frac{D}{f}$ est constant. Par conséquent, si la valeur de D double, celle de f double également, l'affirmation est vraie.

C : Étude théorique

1.

a. Les droites (AH) et (A'K) sont parallèles parce qu'elles sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (KH). *Remarque : cette preuve n'est valable que si les points K, C et H sont alignés, ainsi que A, B et H d'une part, A', B' et K d'autre part. Ces alignements ne sont pas explicites dans l'énoncé…*

b. Le codage de la figure indique que dans la symétrie par rapport à (HK) B est le symétrique de A et B' est le symétrique de A'. Il en résulte que les droites (AA') et (BB') sont symétriques, (HK) est donc un axe de symétrie de la figure. *Remarque : comme la question précédente, on suppose les alignements de A, B et H d'une part, A', B' et K d'autre part.*

2. C, A et A' sont alignés. C, H et K sont alignés. Par ailleurs les droites (AH) et (A'K) sont parallèles, Le théorème de Thales s'applique donc triangles CHA et CKA' et on a : $\frac{CH}{CK} = \frac{AH}{A'K}$

3. Comme L = AB = 2 AH et l = A'B'=2 A'K on déduit de la question précédente que $\frac{CH}{CK} = \frac{L}{l}$

Par ailleurs CK = f et CH = D-f, on a donc $\frac{D-f}{f} = \frac{L}{l}$ d'où $\frac{D}{f} - 1 = \frac{L}{l}$ et enfin $\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1$.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

1.

a. Selon le diagramme 12 archers du club A ont obtenu exactement 6 points lors de ce championnat. *Remarque : L'énoncé indique que le diagramme porte sur les résultats des archers du club A, mais la formulation de la question ne parle pas du club A…elle semble donc porter sur touts les participants. On considèrera qu'il doit être possible de répondre à la question et que celle-ci porte donc implicitement sur les archers du club A.*

b. 75 archers du club A ont gagné 3 points ou plus. *On peut faire la somme des effectifs pour tous les scores égaux ou supérieur à 3, ou soustraire de l'effectif total les 5 archers qui ont obtenu moins de 3 points.*

c. L'effectif étant de 80, le score médian est situé entre celui du 40ème et celui du 41ème (dans l'ordre croissant ou décroissant). Ces deux archers ayant un score de 7, le score médian est également de 7.

2.

a. Le nombre total de points marqués par les archers du club A est égal à :
$5\times2 + 9\times3 + 8\times5 + 12\times6 + 14\times7 + 6\times8 + 8\times9 + 18\times10$ soit
$10 + 27 + 40 + 72 + 98 + 48 + 72 + 180$ ou 547.

La moyenne des archers du club A est donc de $\frac{547}{80} = 6{,}8375$. En prenant comme critère le score moyen, le club B l'emporte sur le club A.

b. Les dix meilleurs archers du club A ont tous obtenu un score de 10. leur moyenne est donc égale à 10. Selon ce critère, le club A l'emporte sur le club B.

Exercice 2

1. Nicolas a tort, en effet si les dés ne sont pas truqués la probabilité d'obtenir 2 avec un dé est égale à celle d'obtenir 1 (ou une autre valeur).
2. Le tableau ci-dessous, dans lequel les cases grisées indiquent horizontalement la valeur prise par un dé et verticalement celle de l'autre dé, montre que sur 36 tirages possibles 11 permettent de prendre une oreille (les cases marquées d'un O) alors qu'une seule permet de prendre la queue. L'affirmation de Sophie est donc fausse, elle a 11 fois plus de chances de pouvoir prendre une oreille que la queue.

	1	2	3	4	5	6
1	O	O	O	O	O	O
2	O					
3	O					
4	O					
5	O					
6	O					

3. Un tableau analogue au précédent montrerait que sur les 36 tirages possibles 25 ne comportent aucun 6. La probabilité de ne pas pouvoir prendre le corps du cochon lors d'un tirage est donc de $\frac{25}{36}$.

Si on effectue deux tirages successif, la probabilité que le même évènement (n'obtenir aucun 6) se produise les deux fois est de $\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}=\frac{625}{1296}$ soit environ 0,48.

Exercice 3

1. La valeur 18 dans la cellule E13 signifie que pour des véhicules contenant 4 sièges et dont la vitesse est de 3 m/s, l'espacement des véhicules doit être au minimum de 18 m.
2. Les formules =$B3*(4+E$2/2) et =B3*(4+4/2) conviennent *(Il n'était demandé qu'une seule réponse)*.
3. La feuille de tableur fournie indique que pour des véhicule à quatre places et une vitesse de 2,3 m/s, l'espacement est de 13,8 m.

En utilisant la formule fournie de calcul du débit on obtient alors

$$D = 3600\times 4\times\frac{2,3}{13,8} = 3600\times 4\times\frac{2,3}{6\times 2,3} = \frac{3600\times 4}{6} = 2400$$

L'affirmation est cohérente avec les données de l'exercice.

4. Pour des véhicules à 4 sièges et une vitesse de 2 m/s, l'espacement est de 12 m, le débit est donc $D = 3600 \times 4 \times \frac{2}{12} = 2400$

Pour des véhicules à 4 sièges et une vitesse de 3 m/s, l'espacement est de 18 m, le débit est donc $D = 3600 \times 4 \times \frac{3}{18} = 2400$ Le débit est donc le même pour une vitesse de 2 m/s et pour une vitesse de 3 m/s.

5. Si on choisit l'espacement minimal, il s'exprime par $E = V\left(4 + \frac{n}{2}\right)$. On peut donc remplacer E par $V\left(4 + \frac{n}{2}\right)$ dans la formule du calcul du débit ce qui donne :

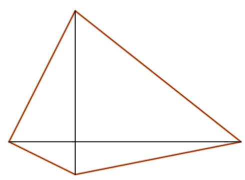
$$D = 3600n \frac{V}{V\left(4 + \frac{n}{2}\right)} = 3600n \frac{1}{4 + \frac{n}{2}} = 3600n \frac{2}{8+n} = \frac{7200n}{8+n}$$

Le débit peut bien s'exprimer uniquement en fonction du nombre de sièges par véhicule, par conséquent il est indépendant de la vitesse ce qui confirme le résultat de la question 4.

Remarque : les deux dernières étapes qui simplifient l'expression de D ne sont pas nécessaires pour répondre à la question.

Exercice 4

1. L'affirmation est fausse. La figure ci-dessous en fournit un contre-exemple.



2. Réduire de 25% c'est multiplier par 0,75. Réduire de 20% c'est multiplier par 0,8.

Le prix payé par Carine est donc égale au prix initial multiplié par $0,75 \times 0,8$ c'est à dire par 0,6.

Cela correspond bien à une réduction de 40%, l'affirmation est vraie.

3. L'affirmation est fausse : le nombre de filles étant 3/4 du nombre de garçons, il et inférieur au nombre de garçons. Les garçons constituent donc plus de la moitié de l'effectif de cette classe.

4. Le nombre *a* a pour reste 3 dans la division par 7, il est donc égal à 7q+3, où q est un entier.

De même *b* = 7q'+4, où q' est un entier. On a donc *a*+*b* = 7q+3 + 7q'+4 = 7 (q+q'+1) ce qui montre que *a*+*b* est divisible par 7. L'affirmation est vraie.

Troisième partie (14 points)

Situation 1

1. $\frac{1}{3}$ est un exemple de nombre pouvant s'écrire sous forme d'une fraction sans être décimal.
2. Un nombre décimal est par définition un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, il peut donc toujours s'écrire sous la forme d'une fraction.
3. Pour comparer deux nombres entiers dont l'écriture ne comporte pas le même nombre de chiffres, on peut comparer les nombres de chiffres : le nombre dont l'écriture est la plus longue est le plus grand. Cette procédure est fausse pour les décimaux, par exemple 3,236514 < 5.
   (Toute autre réponse correcte est évidemment acceptée).

Situation 2

Procédure 1 : Avec 4€ on achète 2 kg de pommes donc avec un euro on en achète 4 fois moins, soit 0,5 kg. Avec 5€ on en achète 5 fois plus qu'avec un euro soit $0{,}5kg \times 5$ ou *2,5kg*.
Cette procédure utilise la « règle de trois ».

Procédure 2 : Avec 4€ on achète 2 kg de pommes donc avec deux euros on en achète 2 fois moins sois 1 kg et avec un euro encore deux fois moins sois un $\frac{1}{2}kg$. Avec 5€ on peut acheter la quantité qui coûte 4€ plus celle qui coûte 1€ soit 2kg et demi ou 2kg et 500g.

Procédure 3 : 1 kg c'est 1000 g, on peut donc utiliser la règle de trois comme dans la procédure 1 mais en exprimant les masses en g.
Avec 4€ on achète 2000 g de pommes donc avec un euro on en achète 4 fois moins, soit 500g. Avec 5€ on en achète 5 fois plus qu'avec un euro soit $500g \times 5$ ou 2500g ou encore 2kg et 500g.

Situation 3

Remarque préalable : on peut espérer que sur le document fourni aux élèves le carré dont l'aire mesure selon l'énoncé 1 cm² a bien des côtés de 1 cm.

1. Production de Raphaëlle.

- Elle a compris certaines propriété de l'aire (Si on place différemment les 4 triangles qui forment un carré, ça ne change pas l'aire, si on découpe une figure en plusieurs morceaux, l'aire de la figure est la somme des aires de ses morceaux).
- Elle sait calculer la moitié d'un entier ou d'un décimal simple (ou bien elle a mémorisé la relation entre 1 et 0,5 et celle entre 0,5 et 0,25).

- Elle sait additionner des nombres décimaux *(l'addition est correcte malgré un alignement très approximatif, ce qui indique qu'elle a bien compris qu'il faut compter les dixièmes avec les dixièmes, les unités avec les unités…)*

Son résultat est erroné parce qu'elle oublie de prendre en compte deux triangles.

Production de Terry.

- Il a compris comme Raphaëlle certaines propriété de l'aire.
- Il a compris le sens de l'écriture fractionnaire (si 4 triangles ont, ensemble, une aire de 1 cm^2 alors trois triangles ont une aire de 3/4 cm^2).
- Dans une situation de proportionnalité, il sait effectuer un calcul simple basé sur la linéarité (l'aire de 40 triangles, c'est 10 fois plus que l'aire de 4 triangles).

Sa réponse est exacte. *(Les erreurs d'orthographe ne relèvent pas des mathématiques).*

Productions de Clément et Cloé

Ces deux élèves utilisent un même raisonnement correct : l'aire étant de 1 centimètre carré pour 4 triangles, on peut l'obtenir en divisant par 4 le nombre de triangles (Pour Cloé ce raisonnement est utilisé lors d'une vérification).

Cloé dénombre des groupes de 4 triangles puis écrit10,3 carrés pour « 10 carrés et 3 triangles ». Il semble donc qu'elle n'ait pas compris que le premier chiffre après la virgule compte des dixièmes. Pour elle 10,3 semble signifier seulement 10 unités et 3 petits morceaux.

Elle pose pour vérifier une division qu'elle mène correctement jusqu'au rang des dixièmes puis s'interrompt, probablement parce que le résultat de la division n'est pas conforme à ce qu'elle a trouvé par son autre raisonnement qui lui semble plus solide.

Clément ne sait peut-être pas interpréter le reste 3 de sa division euclidienne et l'écrit après la virgule, pour traduire le fait que le résultat est supérieur à 10, ou bien il interprète correctement sa division : il y a 10 carrés (groupes de 4 triangles) et trois triangles puis commet la même erreur que Cloé.