

Session 2015

PE2-15-2-PG3

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mercredi 29 avril 2015 – de 9h00 à 13h00
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques

Durée : 4 heures
Épreuve notée sur 40

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

Ce sujet contient 12 pages, numérotées de 1/12 à 12/12. Assurez-vous que cet exemplaire est complet. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.

Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE
(13 points)

Un professeur veut préparer le matériel nécessaire pour mener une activité de découverte des formes géométriques. Il souhaite proposer aux élèves de fabriquer des figures comme ci-dessous, par découpage, collage puis coloriage. Il voudrait que chacune de ces figures, qui évoque une tête, ait un « œil » en forme de carré et un « œil » en forme de triangle équilatéral.

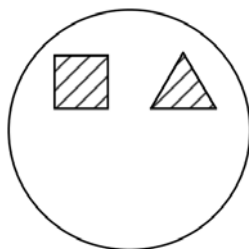


Figure 1

Il dispose de feuilles cartonnées dans lesquelles il découpera des carrés. Dans ces carrés, les élèves réaliseront les différents découpages requis.

A. Étude de la situation concrète

La documentation dont il dispose propose de découper deux paires d'yeux dans des carrés de 7 cm de côté selon le schéma approximatif suivant :

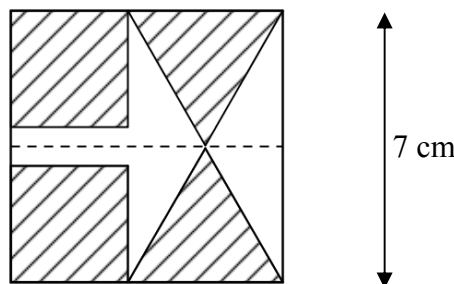


Figure 2

dans lequel les figures hachurées sont des carrés de 3 cm de côté et des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

1. a) Vérifier qu'il est possible de découper dans un carré de 7 cm de côté, deux paires d'yeux formées d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, dans la disposition de la *Figure 2*.

Dans cette question, on pourra utiliser le résultat suivant :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- b) Le professeur constate que les carrés et les triangles équilatéraux que les élèves auront à découper ont le même périmètre. Ont-ils la même aire ?

2. Le professeur se demande s'il est possible de choisir d'autres dimensions pour les yeux de telle sorte qu'on puisse les découper dans des feuilles carrées de 7 cm de côté dans la disposition de la *Figure 2*, le carré et le triangle équilatéral ayant le même périmètre.

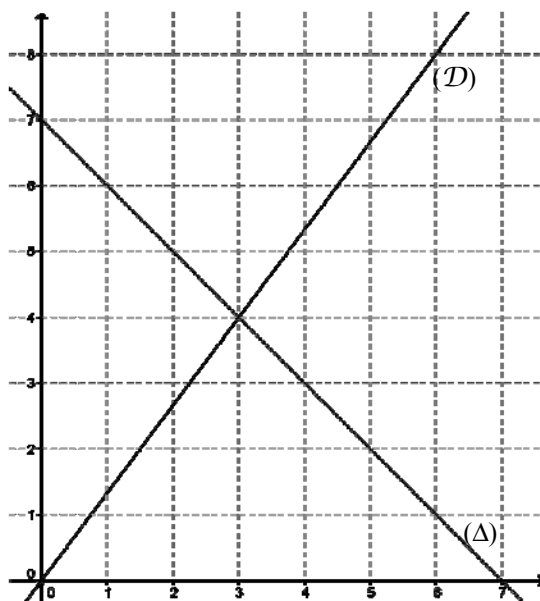
Pour cela, il appelle x le côté du carré hachuré et y celui du triangle équilatéral hachuré.

- a) Expliquer pourquoi si x et y sont solutions du problème, alors ils vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

- b) Sur le graphique ci-dessous on a représenté les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{4}{3}x \text{ et } g(x) = 7 - x.$$



Expliquer comment cette représentation graphique peut permettre de répondre au problème que se pose le professeur.

- c) Résoudre par le calcul le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ et en déduire la solution au problème.

3. Vingt-cinq élèves doivent participer à cette activité.

Le professeur dispose de feuilles cartonnées de format A3, de dimensions, en mm, 420×297 . Il veut que chaque élève dispose d'un carré de 14 cm de côté, dans lequel il découpera un disque de rayon 7 cm pour faire la tête, et d'un rectangle de dimensions 7 cm sur 3,5 cm, dans lequel il découpera une paire d'yeux.

Quel nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 doit prévoir le professeur ?

B. Démonstration de résultats mathématiques

1. Démontrer le résultat rappelé à la question A. 1. a) :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

2. Dans cette question, on considère un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}x$.
- a) Vérifier que ce carré et ce triangle équilatéral ont le même périmètre.
- b) Exprimer l'aire A_1 du carré et l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x .
En déduire le rapport $\frac{A_2}{A_1}$.
- c) Expliquer pourquoi les réponses aux questions a) et b) ci-dessus permettent de retrouver le résultat de la question A.1.b).

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

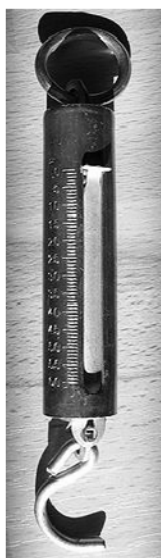
EXERCICE 1

Un vététiste fait chaque semaine une sortie depuis son domicile situé à une altitude de 500 m, jusqu'à un col culminant à une altitude de 1350 m. Il a le choix entre emprunter une route goudronnée de 27 km ou une piste en terre de 28 km.

1. La semaine dernière, il a décidé de prendre la route goudronnée. En partant à 8 h 10 min, il est arrivé au col à 9 h 40 min. À quelle vitesse moyenne a-t-il roulé ?
2. Cette semaine il a pris la piste en terre. Il constate qu'il a mis 1 h 45 min pour effectuer ce trajet. De quel pourcentage sa vitesse moyenne a-t-elle diminué ?

EXERCICE 2

Pour colorer l'émail des objets qu'il fabrique, un artisan utilise des oxydes métalliques. Pour peser certains de ces oxydes métalliques, il utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer.



*Exemple de peson à ressort.
Source : Wikipédia*

Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge.

Au repos, le ressort du peson a pour longueur 14 cm.

Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur 14,5 cm.

Chaque fois que l'on ajoute 10 g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de 0,5 cm.

1. Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de 70 g ?
2. L'artisan constate que le ressort mesure 28 cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?
3. La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 3

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

1. On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, q étant non nul.
Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 10^{-3} près 1,118.
On sait de plus que $q = 1789$.
Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour p ?
2. L'objectif de cette question est d'établir un résultat pour la comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.
 - a) Comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{13}$ et $\frac{13}{14}$; $\frac{176}{177}$ et $\frac{177}{178}$. Quel résultat général peut-on conjecturer ?
 - b) Démontrer ce résultat.
 - c) Comparer les nombres $\frac{987\ 654\ 322}{987\ 654\ 323}$ et $\frac{987\ 654\ 321}{987\ 654\ 322}$ sans effectuer de calcul.

EXERCICE 4

On joue à un jeu nécessitant deux dés différents.

Le premier dé est un tétraèdre régulier à 4 faces ; une face est rouge, une est bleue et les deux autres sont jaunes.

Le deuxième est un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On suppose les deux dés bien équilibrés.

On lance en premier le dé tétraédrique et on note la couleur de la face sur laquelle il repose. Puis on lance le dé à 6 faces et on note le numéro porté sur la face de dessus.

1. Calculer la probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

TROISIÈME PARTIE
(14 points)

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

Situation n°1

L'exercice ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de CM1.

Une école organise une sortie de fin d'année. Pour se déplacer, le directeur loue des bus qui peuvent accueillir 42 passagers chacun. Il y a 157 élèves dans l'école et 20 adultes les accompagneront. Combien faut-il réserver de bus ?

1. Quelle opération mathématique est l'enjeu de ce problème ?
2. Dans l'annexe, sont présentées les productions de quatre élèves A, B, C et D. Pour chacune d'elles, expliquer la procédure utilisée.
3. Un autre élève de la classe a effectué la division de 157 par 20.
À quelle question ce calcul pourrait-il répondre ?
4. La situation du problème de départ et celle de la question 3. illustrent deux sens différents de la division. Les expliciter.

Situation n°2

L'exercice ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de CM1.

J'avais 28 litres d'essence. J'ai rempli de façon identique 8 bidons de même contenance en utilisant toute l'essence. Combien ai-je mis de litres dans chaque bidon ?

1. Quelle opération permet de répondre à cette question ?
2. Dans l'annexe, sont présentées les productions de trois élèves E, F et G. Pour chacune de ces productions expliquer la procédure utilisée.

Situation n°3

Voici un autre exercice proposé à des élèves de CM2.

Il faut exactement 28 litres d'essence pour remplir complètement 8 bidons de contenance identique. Combien peut-on remplir de bidons avec 7 litres d'essence ?

1. De quelle(s) notion(s) mathématique(s) relève cet exercice ?
2. Proposer deux résolutions différentes de cet exercice qui peuvent être attendues d'un élève de CM2, en explicitant les raisonnements sous-jacents.

Situation n°4

L'exercice suivant a été donné à des élèves de l'école primaire :

On découpe un ruban mesurant 137,6 cm en 8 morceaux de même longueur. Combien mesure chacun des morceaux ?

1. Quel sens de la division illustre-t-il ?
2. Proposer une procédure pour résoudre ce problème, permettant de se ramener à une opération sur les nombres entiers.
3. Proposer une procédure de calcul qui peut être attendue d'un élève de CM2 pour effectuer la division $137,6 \div 8$, sans se ramener à une opération sur les entiers.
4. Le quotient d'un nombre décimal par 8 est-il toujours un nombre décimal ? justifier.

ANNEXE

Situation n°1

Élève A

Je cherche le nombre de bus qu'il faudrait.

Je cherche le nombre de bus qu'il faudrait.

Bus ① Bus ② Bus ③ Bus ④ Bus ⑤

$$\begin{array}{r} 177 \\ - 42 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ - 42 \\ \hline 93 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ - 42 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ - 42 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

Il faudrait 5 Bus.

Il faudrait 5 Bus

Élève B

Je cherche combien faut-il de bus

J'ai additionné le nombre d'élèves et d'adultes et multiplié les places qu'il y a dans un bus

Je cherche combien faut-il de bus.

$$\begin{array}{r} 157 \\ + 20 \\ \hline 177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 3 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 4 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 5 \\ \hline 210 \end{array}$$

J'ai additionné le nombre d'élèves et d'adultes et multiplié les places qu'il y a dans un bus

Il faudra réserver 5 bus

Il faudra réserver 5 bus

Élève C

$$\begin{array}{r} 157 \\ + 20 \\ \hline 177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 177 \\ - 168 \\ \hline 009 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \\ 4 \end{array}$$

Il faut réserver
5 bus pour tous les
élèves et pour
tous les adultes.

Il faut réserver 5 bus
pour tous les élèves et
pour tous les adultes.

Élève D

$$\begin{array}{r} 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 84 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 126 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 168 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 177 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 9 \\ \hline \end{array}$$

Il faut réserver 5 bus

Il faut réserver 5 bus

J'ai fait comme ça
pour voir combien de bus
le directeur doit réserver.

J'ai fait comme ça pour
voir combien de bus le
directeur doit réserver.

Situation n° 2

Élève E

Je cherche le nombre de litre qu'il y aurait dans chaque bidon

je cherche le nombre de litre qu'il y aurait dans chaque bidon.

$$1L = 1000ml$$

$$1L = 1000ml$$



Chaque bidon contiendra 3¹/₂ et demi

Chaque bidon contiendra 3L et demi

Élève F

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

Tout les bidon son remplis avec 3 demi.

Tout les bidon son emplis avec 3 demi

Élève G

J'ai mis 3,5 litres dans les 8 bidons.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ -24 & 3,5 \\ \hline & 40 \\ & \underline{0} \end{array}$$

J'ai mis 3,5 litres dans les 8 bidons.