Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2006 du sujet de Polynésie Française

Exercice 1

1. On note $n(h)$ le nombre de cubes nécessaires pour une hauteur de h cubes.

   On trouve $n(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ et $n(9) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

2. Il n'y a pas proportionnalité entre h et $n(h)$. En effet, le tableau de valeurs suivant n'est pas "de proportionnalité",

h	4	5	9
$n(h)$	10	15	45

   simplement parce que, par exemple, les produits en croix ne sont pas égaux : $\underbrace{4 \times 15}_{=60} \neq \underbrace{5 \times 10}_{=50}$.

3. Le mur est constitué est un pavé droit de hauteur h, de profondeur 1 et de largeur $h + 1$. Son volume (en nombre de cubes) est donc $h \times (h + 1)$. Autrement dit, un mur est constitué de $h \times (h + 1)$ cubes. Or, le mur est constitué de deux escaliers identiques de hauteur h, le volume d'un escalier (en nombre de cubes) est donc $\frac{h\times(h+1)}{2}$. Autrement dit, un escalier est constitué de $\frac{h\times(h+1)}{2}$ cubes.

4. On cherche le plus grand h possible tel que $\frac{h\times(h+1)}{2} \leq 3523$.

   On peut résoudre ce problème par tâtonnement ...

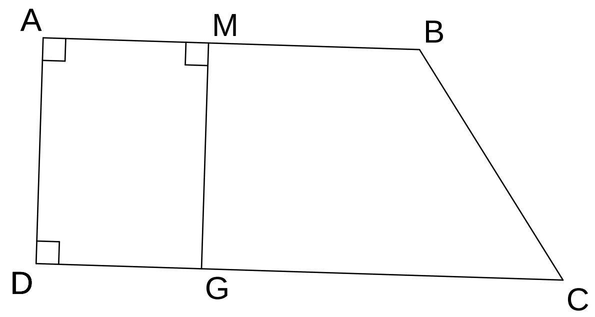
h	$n(h)$	Conclusion
10	55	pas assez
100	5050	trop
50	1275	pas assez
60	1830	pas assez
70	2485	pas assez
80	3240	pas assez
90	4095	trop
85	3655	trop
81	3321	pas assez
82	3403	pas assez
83	3486	pas assez
84	3570	trop

et h vaut au maximum 83, auquel cas, $n(h) = 3486$.

Il reste donc $3523 - 3486 = 37$ cubes.

Exercice 2

1. On note $\mathcal{A}$ la fonction aire.



L'aire du jardin : $\mathcal{A}(ABCD) = \frac{50m+70m}{2} \times 30m = 1800m^2$ (formule de l'aire d'un trapèze).

2. L'aire du potager : $\mathcal{A}(AMGD) = x \times 30m$ (formule de l'aire d'un rectangle).

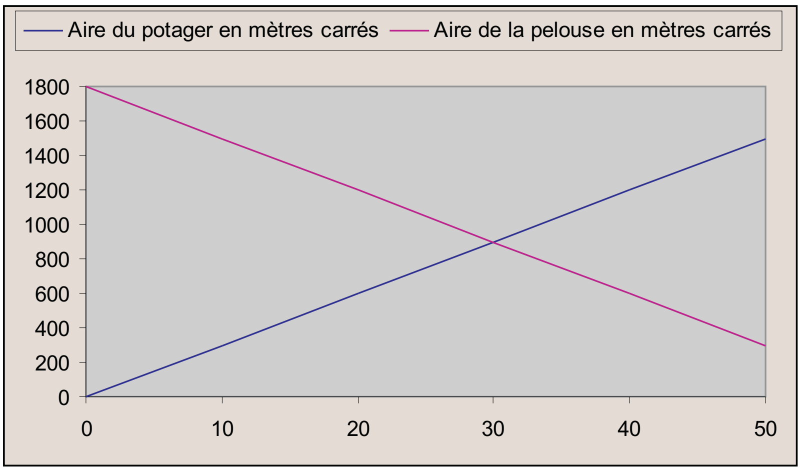
   On déduit l'aire de la pelouse par différence : $\mathcal{A}(MBCG) = \mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(AMGD) = 1800m^2 - x \times 30m$.

3. Le potager et la pelouse ont même aire lorsque $\mathcal{A}(AMGD) = \mathcal{A}(MBCG)$ ou encore lorsque $1800m^2 - x \times 30m = x \times 30m$, soit $1800m^2 = 2 \times x \times 30m$, soit $x = \frac{1800m^2}{2\times 30m} = 30m$.

   Le rectangle $AMGD$ a donc deux côtés consécutifs égaux et est par conséquent un carré.

4. (a) La représentation graphique (x exprimé en mètres sur l'axe des abscisses) des deux fonctions (exprimées en mètres carrés sur l'axe des ordonnées) : $x \mapsto x \times 30m$ et $x \mapsto 1800m^2 - x \times 30m$.

   Remarque : l'échelle n'est pas respéctée.



(b) On s'apperçoit graphiquement que les aires sont égales lorsqu'elles valent à peu près $900m^2$ pour une valeur de x voisine de $30m$.

Remarque : une solution graphique donne généralement des résultats approchés.

5. Il s'agit ici d'une situation de proportionnalité qu'on peut synthétiser dans un tableau :

Aire ensemencée en m^2	500	900
Masse de semence en kg	10	μ

Un produit en croix fournit comme résultat : $\mu = \frac{10\times 900}{500} = 18$.

Il faut donc $18kg$ de semences pour ensemencer une pelouse de $900m^2$.

Question complémentaire

Soit x le nombre d'euros échangés contre $f(x)$ francs suisses.

L'unique donnée du problème peut donc se traduire par $f(20) = 30$.

Florent

- Exercice 1. *Propriété utilisée* : propriété multiplicative de linéarité. *Procédure* : il remarque que $120 = 20 \times 6$ puis il utilise $f(20 \times 6) = 6 \times f(20) = 6 \times 30 = 180$. *Erreur* : aucune.
- Exercice 2. *Propriété utilisée* :indirectement le coefficient de proportionnalité. *Procédure* : ayant résolu l'exercice 1, il s'est apperçu que $f(x) = x + \frac{x}{2}$ (soit $f(x) = \frac{3}{2} \times x$) ce qu'il utilise $f(40) = 40 + \frac{40}{2} = 40 + 20 = 60$. *Erreur* : aucune.
- Exercice 3. Voir exercice 2.
- Exercice 4. Non traité.
- Exercice 5. *Erreur* : au lieu de considérer que dans une situation de proportionnalité, les écarts devaient être proportionnels également, il considère que dans une situation de proportionnalité, les écarts devaient être égaux : on a $f(20-6) = \underbrace{f(20)}_{=30} - f(6) \neq \underbrace{f(20)}_{=30} - 6$. Le résultat est faux parce qu'il atribue à la proportionnalité une propriété fausse. Remarque : ce qui a été rayé semblait bien parti !

Victor

- Exercice 1. *Propriété utilisée incorrecte* : $f(x) = 2 \times x - 10$. *Procédure* : il utilise sa procédure incorrecte pour trouver $f(120) = 2 \times 120 - 10 = 240 - 10 = 230$. *Erreur* : il a lié d'une façon affine les données 30 euros et 20 francs suisses au lieu de les lier de façon linéaire ; il n'a pas compris qu'il s'ahgissait d'une situation de proportionnalité.
- Exercice 2. Voir exercice 1.
- Exercice 3. Voir exercice 1.
- Exercice 4. Voir exercice 1.
- Exercice 5. *Erreur* : toujours en utilisant sa procédure incorrecte, il se demande combien de francs suisses correspondent à une valeur de 14 euros (la démarche est correcte), conclut que 14 euros correspondent à 18 francs suisses ($f(14) = 2 \times 14 - 10 = 28 - 10 = 18$) ; et, s'il ne l'exprime pas, on se doute qu'il a dû tout de même conclure mentalement que $18 \neq 24$, ainsi sa réponse serait correcte, la démarche pour comparer ce qui est donné avec ce qui devrait être d'après lui est également correcte, mais la propriété utilisée est toujours aussi incorrecte que dans l'exercice 1.

Jessy

- Exercice 1. *Propriété utilisée* : propriété additive de linéarité. *Procédure* : elle décompose la somme de 120 euros en 6 billets de 20 euros puis elle utilise $f(20+20+20+20+20+20) = f(20)+f(20)+f(20)+f(20)+f(20)+f(20) = 30+30+30+30+30+30 = 180$. Remarque : elle note le calcul de ses additions itérées multiplicativement en ligne. *Erreur* : aucune.
- Exercice 2. Voir exercice 1.
- Exercice 3. Non traité.
- Exercice 4. Voir exercice 1.
- Exercice 5. Non traité.

Cécile Voir Victor mais avec une autre *propriété utilisée incorrecte* : $f(x) = x + 10$. Cependant, contrairement à Victor, Cécila va conclure qu'elle est d'accord avec l'hypothèse proposée dans l'exercice 5.

Exercice 3

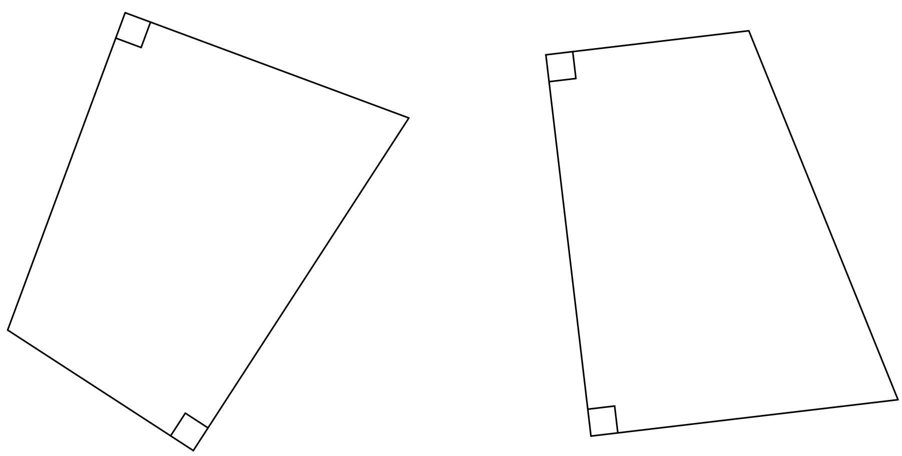
1. Nombre de possibilités pour la première étiquette : 10. Nombre de possibilités pour la deuxième étiquette (la première étant déjà choisie) : 9.

   On a ainsi $10 \times 9 = 90$ possibilités de prendre 2 étiquettes parmi les 10, **dans cet ordre**.

   Cependant, on a ainsi compté 2 fois chaque tirage : prendre l'étiquette n°1 puis l'étiquette n°2 résulte du même tirage que prendre l'étiquette n°2 puis l'étiquette n°1.

   On a ainsi $\frac{90}{2} = 45$ **tirages possibles**.

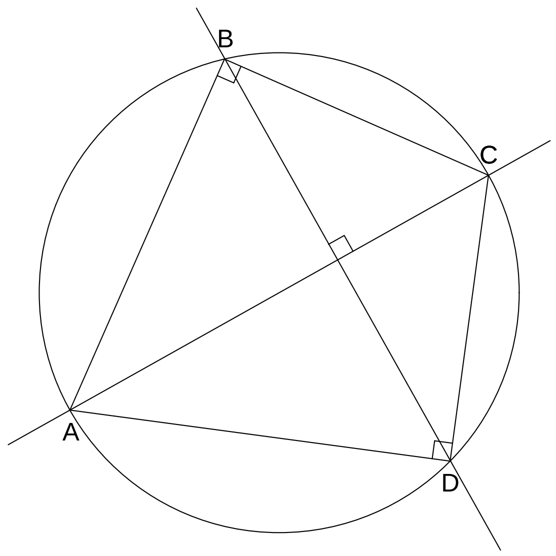
2. (a) Les angles droits peuvent être ou opposés ou consécutifs. On peut donc obtenir, par exemple, les deux configurations :



   (b) • **Cas de deux angles droits opposés**.

   Remarque : ce quadrilatère $ABCD$ rectangle en B et en D est inscriptible dans un cercle de diamètre $[AC]$, d'après la propriété qui dit que le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse de ce triangle.

Ainsi, je construis un cercle Γ de centre O, je trace une droite d passant par O, j'appelle A et C les intersections distinctes de Γ et de d, je place B un point sur Γ, je mène la perpendiculaire δ à la droite (AC) passant par B et j'appelle D le point d'intersection de Γ et de δ distinct de B. Je trace le quadrilatère $ABCD$.

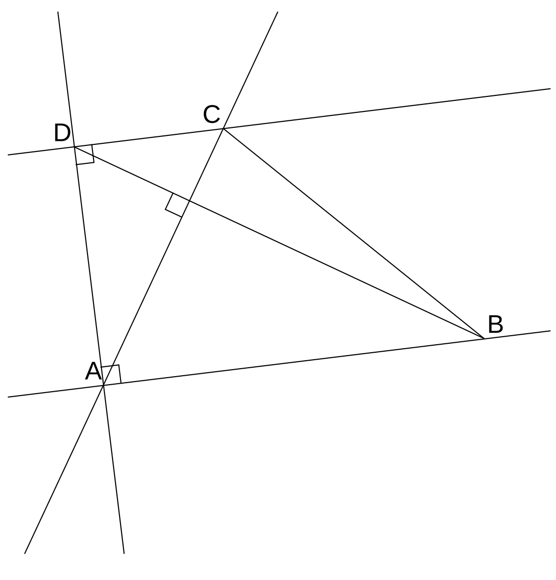


Remarque : pour que le quadrilatère ait deux angles droits **seulement**, il faut et il suffit d'éviter de choisir B tel que le triangle ABC soit isocèle (rectangle) en B.

- **Cas de deux angles droits consécutifs**.

Remarque : ce quadrilatère $ABCD$ est supposé rectangle en B et en D.

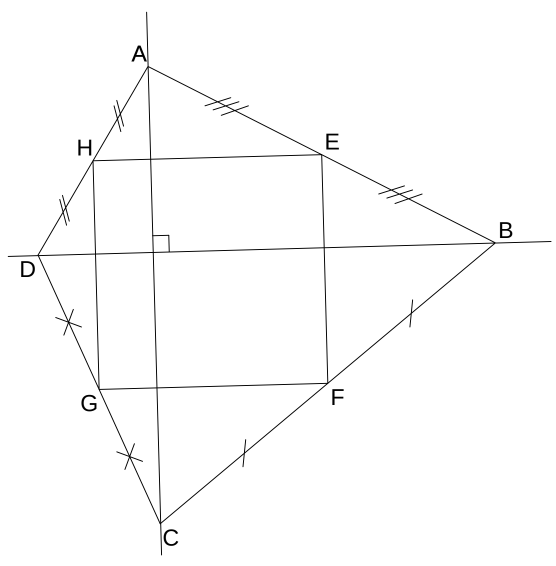
Ainsi, je trace une droite (AB), je mène la perpendiculaire d à la droite (AB) passant par A, je place D un point sur d, je mène la perpendiculaire δ à la droite d passant par D, je mène la perpendiculaire Δ à la droite (BD) passant par A et j'appelle C le point d'intersection de δ et de Δ. Je trace le quadrilatère $ABCD$.



Remarque : pour que le quadrilatère ait deux angles droits **seulement**, il faut et il suffit d'éviter de choisir D tel que le triangle ABD soit isocèle (rectangle) en A.

3. - "Deux côtés parallèles seulement" et "deux angles droits seulement" : **oui**, si $ABCD$ est un carré et que I est milieu du segment $[AB]$, $AICD$ convient.
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "côtés égaux deux à deux" : **oui**, si $ABCD$ est un carré, $ABDC$ convient.
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "quatre côtés égaux" : **non**, quatre côtés égaux induisent qu'il s'agit d'un losange et donc que ses côtés opposés sont parallèles (contradiction avec le "seulement").
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "diagonales perpendiculaires" : **oui**, $ABCD$ un trapèze rectangle en A et en B tel que $AB = 2$, $AD = 1$ et $BC = 4$ convient (preuve utilisant les triangles semblables).
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "quatre angles droits" : **non**, quatre angles droits induisent qu'il s'agit d'un rectangle et donc que ses côtés opposés sont parallèles (contradiction avec le "seulement").
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "deux côtés égaux seulement" : **oui**, si $ABCD$ est un carré, I appartient au segment $[AB]$ tel que $3\times AI = AB$, J appartient au segment $[AB]$ tel que $3\times BJ = AB$, $IJCD$ convient.
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "côtés opposés parallèles" : **non** (immédiate contradiction avec le "seulement").
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "diagonales égales" : **oui**, si $ABCD$ est un carré, I appartient au segment $[AB]$ tel que $3 \times AI = AB$, J appartient au segment $[AB]$ tel que $3 \times BJ = AB$, $IJCD$ convient.
   - "Deux côtés parallèles seulement" et "diagonales se rencontrant en leur milieu" : **non**, diagonales se rencontrant en leur milieu induisent qu'il s'agit d'un parallélogramme et donc que ses côtés opposés sont parallèles (contradiction avec le "seulement").

4. Figure.



Le théorème des milieux appliqué au triangle ABC donne :

$$(EF)//(AC) \tag{1}$$
$$EF = \frac{AC}{2} \tag{2}$$

Le théorème des milieux appliqué au triangle BCD donne :

$$(FG)//(BD) \tag{3}$$
$$FG = \frac{BD}{2} \tag{4}$$

Le théorème des milieux appliqué au triangle CDA donne :

$$(GH)//(AC) \tag{5}$$
$$GH = \frac{AC}{2} \tag{6}$$

Le théorème des milieux appliqué au triangle DAB donne :

$$(HE)//(BD) \tag{7}$$
$$HE = \frac{BD}{2} \tag{8}$$

De (1) et (5) on déduit (transitivité du parallélisme) :

$$(EF)//(GH)//(AC) \tag{9}$$

De (3) et (7) on déduit (si d et d' sont parallèles, une parallèle à d est parallèle à d') :

$$(FG)//(EH)//(BD) \tag{10}$$

De (2) et (6) on déduit :

$$EF = GH = \frac{AC}{2} \tag{11}$$

De (4) et (8) on déduit :

$$FG = EH = \frac{BD}{2} \tag{12}$$

De (9) et (10), et comme $(AC) \perp (BD)$, on tire que les côtés consécutifs de $EFGH$ sont perpendiculaires (si d et d' sont perpendiculaires, une parallèle à d est perpendicualire à d'), et $EFGH$ est un rectangle.

De (11) et (12), et comme $AC = BD$, on tire que les côtés consécutifs de $EFGH$ sont égaux, et $EFGH$ est un losange.

$EFGH$ est donc à la fois rectangle et losange, c'est donc un **carré**.

Question complémentaire

1. Le vocabulaire relatif aux quadrilatères, les propriétés de certains quadrilatères (côtés opposés parallèles, angles droits, côtés égaux, ...) et quadrilatères particuliers (losange, rectangle, carré) sont abordées au cycle 3.

2. Commentaires entre crochets.

   (a) En termes de compétences géométriques, les compétences de cycle 3 qui peuvent être citées ici sont :

   - **Tracer**, avec un compas et une règle, **un segment de même longueur qu'un segment donné**. [Pour traiter "côtés égaux"]
   - **Tracer** à l'aide de l'équerre la **perpendiculaire** à une droite donnée passant par un point donné (sur la droite ou hors de la droite). [Pour traiter "angles droits"]
   - **Tracer** à l'aide de l'équerre et de la règle une **parallèle** à une droite donnée. [Pour traiter "côtés parallèles"]
   - Utiliser à bon escient le **vocabulaire** suivant : triangle, triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, **carré**, **rectangle**, **losange**, cercle ; sommet, **côté** ; centre, rayon et diamètre pour le cercle. [Mais surtout en connaître certaines propriétés comme "côtés égaux", "angles droits", "côtés parallèles", ...]
   - **Tracer une figure** (sur papier uni, quadrillé ou pointé), soit à partir de la donnée d'un modèle, soit **à partir d'une description**, d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée.

   (b) En termes de compétences pour résoudre des problèmes, les compétences de cycle 3 qui peuvent être citées ici sont :

   - utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes ; [connaissances citées ci-haut] ;
   - chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche ; [ce genre de problème peut être abordé pour la première fois avec les élèves, d'où "originale" ; une solution peut être obtenue par tâtonnement, d'où "de recherche"] ;
   - mettre en oeuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution ; [pour gérer par exemple deux contraintes à la fois] ;
   - formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit et les exposer oralement ; [lors du rtacé d'un quadrilatère solution] ;
   - contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution ; [à l'aide d'outils géométriques, vérifier que la solution proposée satisfait bien les deux contraintes].

3. "deux angles droits seulement" ; "deux côtés égaux seulement".

   - $\boxed{\text{Elève A}}$. Il a probablement construit un début de quadrilatère possédant deux angles droits **consécutifs** (il n'est pas requis que ces angles droits soient consécutifs, mais l'élève aurait encore pu aboutir à une solution malgré ce choix). Puis, il a probablement continué en considérant que les côtés **opposés** devaient être égaux (cependant, deux côtés égaux ne sont pas forcément opposés, ce choix est celui de trop). Il s'apperçoit peut-être alors que s'il poursuit dans cette voie, il obtient un rectangle (deux côtés opposés parallèles et de même longueur, d'où un parallélogramme, et avec un angle droit, d'où un rectangle) et refuse de continuer car dans un rectangle, les quatre angles sont droits.
   - $\boxed{\text{Elève B}}$. Il a probablement voulu construire un quadrilatère à diagonales égales et perpendiculaires. Il semble qu'il ait confondu côtés et diagonales (il est implicite que dans l'expression "deux angles

droits seulement", cela concerne des angles formés par les côtés).

- $\boxed{\text{Elève C}}$. Il a procédé certainement comme l'élève A et a dû aboutir à la même conclusion. Mais lorsqu'il a voulu éviter de construire une figure possédant un troisième angle droit (un rectangle), il a perdu de vue qu'il devait réaliser un quadrilatère : le pentagone construit possède effectivement deux angles droits, deux côtés parallèles seulement et égaux -seulement ?, avec un " ?" volontaire-, mais il ne s'agit pas d'un quadrilatère.