Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2007 du sujet de Guadeloupe, Guyane, Martinique

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. $S_{2,5,7} = 257 + 275 + 527 + 572 + 725 + 752 = 3108$. $M_{2,5,7} = \frac{257+275+527+572+725+752}{6} = \frac{3108}{6} = 518$.
2.

$$\begin{aligned} S_{a,b,c} &= \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} \\ &= (100 \times a + 10 \times b + c) + (100 \times a + 10 \times c + b) + (100 \times b + 10 \times a + c) \\ &\quad +(100 \times b + 10 \times c + a) + (100 \times c + 10 \times a + b) + (100 \times c + 10 \times b + a) \\ &= 222 \times (a + b + c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{a,b,c} &= \frac{\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}}{6} \\ &= \frac{(100 \times a + 10 \times b + c) + (100 \times a + 10 \times c + b) + (100 \times b + 10 \times a + c)}{6} \\ &\quad + \frac{(100 \times b + 10 \times c + a) + (100 \times c + 10 \times a + b) + (100 \times c + 10 \times b + a)}{6} \\ &= \frac{222 \times (a + b + c)}{6} \\ &= 37 \times (a + b + c). \end{aligned}$$

3. $M_{a,b,c} = 370$, donc, d'après la question précédente, $a + b + c = \frac{370}{37} = 10$. Donc, les a, b, c doivent être choisis dans l'un des quatre ensembles suivants ...
   - $\{1, 2, 7\}$,
   - $\{1, 3, 6\}$,
   - $\{1, 4, 5\}$,
   - $\{2, 3, 5\}$,

   dont la somme des éléments vaut 10.

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 2

1. • La figure animée (au format HTM) : déplacer le point M pour faire varier la longueur du segment $[EF]$.
   • La figure animée (au format FDC) : déplacer le point M pour faire varier la longueur du segment $[EF]$.

   Sur le graphique, on observe que $\boxed{\text{le minimum de } EF \text{ est entre } 4cm \text{ et } 5cm, \text{ approximativement } 4,8cm}$ et ce minimum est atteint pour EM entre $6cm$ et $7cm$, approximativement $6,4cm$.

2. (a) Le quadrilatère $AEMF$ possède trois angles droits (en A car le triangle ABC est rectangle en A, en E par définition de la perpendiculaire et en F par définition de la perpendiculaire), c'est donc un $\boxed{\text{rectangle}}$.

   Par suite, comme les diagonales d'un rectangle sont de même mesure, on obtient $\boxed{AM = EF}$.

   (b) En conclusion, minimiser la longueur EF revient à minimiser la longueur AM avec M sur la droite (BC), c'est-à-dire à donner M comme le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) (et ce projeté appartient au segment $[BC]$ car le triangle ABC est rectangle en A).

   En d'autres termes, "trouver M pour minimiser EF" équivaut à "définir M comme le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A".

3. (a) Le triangle ABC est rectangle en A, le théorème de Pythagore donne donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2cm^2 + 6^2cm^2 = 100cm^2$, puis $\boxed{BC = \sqrt{100cm^2} = 10cm}$.

   (b) L'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC est $\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{8cm \times 6cm}{2} = 24cm^2}$.

   (c) Lorsque M est le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A, on a $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AM}{2} = \frac{10cm \times AM}{2} = 24cm^2$. Puis, $AM = \frac{2 \times 24cm^2}{10cm} = 4,8cm$.

   Comme $AM = EF$, $\boxed{\text{la valeur minimale de } EF \text{ est } 4,8cm}$. Et, ceci conforte l'analyse graphique de la question 1.

Question complémentaire.

PARTIE 1

Remarque : il aurait été intéressant d'avoir une idée de la taille d'origine de la représentation par la maîtresse de la situation en cour de récréation. Dans la suite, il est supposé que la distance entre le chaperon rouge et la maison de la grand-mère est approximativement de $10m$.

1. On se limite aux compétences de cycle 1 et de cycle 2 parce que la séance se déroule au CP.
   • C1 : "comparer, classer et ranger des objets selon leur taille [...]". Bien qu'il ne s'agisse pas réellement d'objets (ce ne sont que des tracés à la craie ...) à comparer, il est bien question de trouver le plus court chemin.
   • C2 : "comparer des objets selon leur longueur [...] par un procédé direct ou indirect". Rectifier les lignes brisées (physiquement ou mentalement) n'est pas facile à mettre en oeuvre dans la cour de récréation, il s'agit donc ici d'en appeler au mesurage qui est un procédé indirect.

- C2 : "choisir l'unité appropriée pour exprimer le résultat d'un mesurage". Ce pourrait être le "pas" d'un enfant, même si ce n'est pas très précis, ou le mètre ...

2. - $\boxed{\text{Groupe A}}$. Ce groupe procède par perception visuelle. La procédure est correcte.
   - $\boxed{\text{Groupe B}}$. Ce groupe compare uniquement l'un des segments d'un chemin avec l'un d'un autre chemin. Ce qu'il déclare : "les morceaux sont plus petits que dans les autres" est correct, mais le fait qu'il ne tienne pas compte du nombre de ces morceaux fait de cette procédure une procédure incorrecte.
   - $\boxed{\text{Groupe C}}$. Ce groupe compare uniquement le nombre de segments d'un chemin avec le nombre de segments d'un autre chemin. Ce qu'il déclare : "il y a moins de morceaux que dans les deux autres chemins" est correct, mais le fait qu'il ne tienne pas compte de la longueur de chacun de ces morceaux fait de cette procédure une procédure incorrecte.
3. Pour valider ou invalider une réponse, le mesurage indirect est de mise : l'enseignante peut proposer un mètre, un double mètre, ... ou même tout étalon de taille raisonnable (un manche à balai ou un balai peuvent faire l'affaire).

   Avec ce matériel, l'élève peut mesurer chacun des chemins puis les comparer par leur mesure.

PARTIE 2

4. - C2 : "comparer des objets selon leur longueur [...] par un procédé direct ou indirect". Par rectification des lignes brisées qui est un procédé direct ou mesurage qui est un procédé indirect.
   - C2 : "utiliser une règle graduée en centimètres pour mesurer [...] une ligne brisée". Ce qui peut être mis en oeuvre en liaison avec la compétence ci-dessous : la règle graduée en centimètres constitue ici un outil très pertinent de mesure.
   - C2 : "choisir l'unité appropriée pour exprimer le résultat d'un mesurage". Ce pourrait être le centimètre ...

   Remarque : les deux compétences principales sont à mon sens les deux premières.
5. (a) $\boxed{\text{Jeanne}}$. Comparaison uniquement du nombre de segments d'une ligne brisée. Le fait que Jeanne ne tienne pas compte de la longueur de chacun de ces segments fait de cette procédure une procédure incorrecte.

   (b) $\boxed{\text{Marion}}$. Comparaison des longueurs d'après les mesures effectives des lignes brisées (sûrement obtenues en utilisant la règle graduée en centimètres). Procédure correcte, mais les mesures des deux autres lignes brisées font 16 et non 15. L'unité utilisée est le centimètre, même si ce n'est pas explicite.

   (c) $\boxed{\text{Tristan}}$. Comparaison d'aires (on peut supposer que cette comparaison est mise en oeuvre par inclusion d'une figure dans une autre) de surfaces conçues en traçant le segment $[AB]$ pour compléter des polygones. La comparasion d'aires est correcte. Le terme "grand carré" est inadéquat mais à la décharge de Tristan, le terme "trapèze" n'est pas au programme de l'Ecole. La procédure de comparaison d'aires ne permet pas de comparer des périmètres ou des longueurs de lignes brisées : elle est incorrecte.

(d) $\boxed{\text{Cathy}}$. Comparaison des longueurs d'après les mesures effectives des lignes brisées (sûrement obtenues en utilisant la règle graduée en centimètres). Procédure et résultats corrects.

PARTIE 3

6. – Une première solution possible : la mesure du segment $[AB]$ est approximativement de $15cm$; si $7,5cm$ font approximativement 3 pouces, $15cm = 2 \times 7,5cm$ font approximativement 6 pouces $= 2 \times 3$ pouces (utilisation de la propriété multiplicative de la linéarité inhérente à cette situation de proportionnalité).
   – Une deuxième solution possible : la mesure du segment $[AB]$ est approximativement de $15cm$; si $7,5cm$ font approximativement 3 pouces, $15cm = 7,5cm + 7,5cm$ font approximativement 6 pouces $= 3$ pouces $+3$ pouces (utilisation de la propriété additive de la linéarité inhérente à cette situation de proportionnalité).
   – Une troisième solution possible : "à vue de nez", la mesure du segment $[AB]$ est voisine de 6 pouces.
   - C3 [exploitation de données numériques] : "Résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées". L'addition ou la multiplication de décimaux sont utilisées (dans les deux premières solutions proposées).
   - C3 [exploitation de données numériques] : "Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité, en utilisant des raisonnements personnels appropriés (dont des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unités)". Il s'agit bien ici d'une situation de proportionnalité (voir les deux premières solutions proposées).
   - C3 [exploitation de données numériques] : "Organiser des séries de données numériques (listes, tableaux, ...)". Cela peut être utile de représenter les données (voir les deux premières solutions proposées) dans un tableau qui sera dit "de proportionnalité" (puisqu'il s'agit ici d'une situation de proportionnalité).
   - C3 [longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées] : "Utiliser des instruments pour mesurer des objets physiques ou géométriques". L'utilisation de la règle graduée en centimètres pour mesurer le segment $[AB]$ est nécessaire avant de transcrire cette longueur en pouces (dans les les deux premières solutions proposées).
   - C3 [longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées] : "Estimer une mesure (ordre de grandeur)". L'élève peut aussi estimer "à vue de nez" la longueur du segment $[AB]$ (dans la troisème solution proposée).
   - C3 [longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées] : "Exprimer par un nombre ou un encadrement le résultat d'un mesurage, l'unité (ou les unités) étant imposée(s)". Ici, l'unité imposée est le pouce.
   - C3 [longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées] : "Utiliser les équivalences entre les unités usuelles de longueur [...]". C'est là-dessus qu'est fondé l'énoncé. L'élève doit utiliser ces équivalences pour savoir qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité.
   - C3 [longueurs, masses, volumes (contenances), repérage du temps, durées] : "Utiliser le calcul pour obtenir la mesure d'une grandeur". C'est là-dessus qu'est fondé l'énoncé. L'élève doit utiliser ces

équivalences pour savoir qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité.

7. – $\boxed{\text{Première procédure}}$: l'élève mesure le segment $[AB]$ et obtient approximativement $15cm$; ensuite, l'élève dresse un tableau de proprtionnalité dans lequel il représente les différentes relations et enfin utilise la propriété multiplicative de la linéarité inhérente à cette situation de proportionnalité :

					AB
longueur en cm	0	$2,5$	5	$7,5$	$15 = 2 \times 7,5$
longueur en pouces	0	1	2	3	$6 = 2 \times 3$

.

Remarque. En conservant l'écart entre le pouce et l'index correspondant à 3 pouces (on nomme étalon sa longueur), l'élève peut dénombrer approximativement deux étalons nécessaires pour mesurer le segment $[AB]$ et conclure en utilisant la même propriété multiplicative de la linéarité : le segment $[AB]$ mesure 2 fois 3 pouces, soit 6 pouces.

– $\boxed{\text{Deuxième procédure}}$: l'élève mesure le segment $[AB]$ et obtient approximativement $15cm$; ensuite, l'élève dresse un tableau de proprtionnalité dans lequel il représente les différentes relations et enfin utilise la propriété additive de la linéarité inhérente à cette situation de proportionnalité :

					AB
longueur en cm	0	$2,5$	5	$7,5$	$15 = 5 + 5 + 5$
longueur en pouces	0	1	2	3	$6 = 2 + 2 + 2$

.

Remarque. En conservant l'écart entre le pouce et l'index correspondant à 2 pouces (on nomme étalon sa longueur), l'élève peut dénombrer approximativement trois étalons nécessaires pour mesurer le segment $[AB]$ et conclure en utilisant la même propriété additive de la linéarité : le segment $[AB]$ mesure 2 pouces +2 pouces +2 pouces, soit 6 pouces.

– $\boxed{\text{Troisième procédure}}$: "à vue de nez", la mesure du segment $[AB]$ est voisine de 6 pouces.

Remarque. S'il fallait choisir deux procédures, je proposerais la première et la troisième.

8. Les trois élèves ont bien compris que la situation relevait de proportionnalité.

   (a) $\boxed{\text{Marion}}$. Elle utilise correctement le **coefficient de proportionnalité** : passer de $8cm$ à 4 pouces revient à "diviser par deux", donc pour convertir $15cm$, on "divise par deux" et on obtient $7,5$ pouces. Seulement, son **hypothèse de départ**, à savoir $8cm$ représente la même longueur que 4 pouces, est **fausse** : elle a pris le maximum sur la règle en centimètres (soit $8cm$) et l'a associé au maximum sur la règle en pouces (soit 4 pouces) sans regarder si ces deux mesures représentaient la même longueur.

   (b) $\boxed{\text{Anthony}}$. Il utilise de façon mixte **la propriété additive et la propriété multiplicative de linéarité** : 4 pouces correspondent à $10,2cm$, donc 2 pouces correspondent à $5,1cm$ (propriété multiplicative de linéarité : on divise 4 par 2 donc $10,2$ aussi !), 8 pouces correspondent à $20,4cm$ (résultat intermédiaire pour lequel on peut imaginer l'usage de la propriété multiplicative de linéarité) et 6 pouces correspondent à $15,3cm$ (propriété additive de linéarité : on somme 4 et 2, donc $10,2$ et $5,1$ aussi !). Cet élève ne commet aucune erreur ni de calcul (division mentale par 2, multiplication mentale par 2, addition posée en colonne) ni de procédure.

(c) $\boxed{\text{Anne-Sophie}}$. Elle utilise correctement le **coefficient de proportionnalité** : passer de $1cm$ à approximativement $0,5$ pouces revient à diviser par deux, donc pour convertir $15,2cm$ (erreur de mesure ?), on divise par deux et on obtient approximativement 8 pouces. Seulement, son **hypothèse de départ** $1cm$ représente la même longueur que $0,5$ pouces est **fausse** : son **approximation** est **trop grossière**, mais avec une approximation plus précise comme $1cm$ représente la même longueur que $0,4$ pouces, ce qui revient à diviser par dix puis à multiplier par quatre, elle aurait obtenu un résultat correct.

Remarque. Les procédures de Marion et d'Anne-Sophie utilisent le coefficient de proportionnalité dont l'utilisation ne fait pas partie des compétences à acquérir à l'Ecole.

Exercice 3

1. (a) La somme totale dépensée de $877,5$ €correspond au prix de 12 places "adulte" et 15 places "enfant" (voir ligne 16 du tableur).

(b) Ligne 21 du tableur :

	nombre d'adultes	nombre d'enfants	prix payé par les adultes	prix payé par les enfants	somme totale dépensée
valeurs	17	10	765	225	990
formules	$= A20 + 1$	$= 27 - A21$	$= A21 * 45$	$= B21 * 22,5$	$= C21 + D21$

.

(c) Ligne 4 du tableur :

	nombre d'adultes	nombre d'enfants	prix payé par les adultes	prix payé par les enfants	somme totale dépensée
valeurs	0	27	0	$607,5$	$607,5$
formules	0	$= 27 - A4$	$= A4 * 45$	$= B4 * 22,5$	$= C4 + D4$

.

Remarque. Pour remplir tout le tableau : on saisit la ligne 4 (voir formules) ; on entre la formule $= A4 + 1$ dans la cellule $A5$; on copie/colle la cellule $A5$ sur la plage $(A6 : A31)$; et on copie/colle la plage $(B4 : E4)$ sur la plage $(B5 : E31)$.

2. (a) Soit x le nombre d'adultes allant au théâtre. Soit y le nombre d'enfants allant au théâtre.

Le nombre de personnes allant au théâtre est $x + y = 27$.

La dépense totale en euros est de $45 \times x + 22,5 \times y = 877,5$.

Ces deux équations fournissent un système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 27\ [L_1] \\ 45 \times x + 22,5 \times y = 877,5\ [L_2] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x + y = 27\ [L_1] \\ 22,5 \times y = 337,5\ [-L_2 + 45 \times L_1] \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y = \frac{337,5}{22,5} = 15 \\ x = 27 - y = 12 \end{array}\right. .$$

Conclusion : 12 adultes et 15 enfants sont allés au théâtre.

(b) Le nombre de parts équivalent "enfant" payées est $\frac{877{,}5}{22{,}5} = 39$.

Chacun a au moins payé une part équivalent "enfant" (27 parts équivalent "enfant" pour 27 personnes), et il reste alors $39 - 27 = 12$ parts équivalent "enfant" supplémenatires qui ont été payées par les adultes. Comme un adulte paye une part équivalent "enfant" supplémentaire, on dénombre 12 adultes (et, $27 - 12 = 15$ enfants) qui ont été au théâtre.

Vérification : $12 + 15 = 27$ et $45 \times 12 + 22,5 \times 15 = 877,5$.