Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2007 du sujet d'Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. – La liste des diviseurs de 6 est $\{1, 2, 3, 6\}$. On a $1 + 2 + 3 = 6$, donc 6 est un nombre parfait.
   – La liste des diviseurs de 496 est $\{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496\}$. On a $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$, donc 496 est un nombre parfait.
2. La liste des diviseurs de 120 est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$. On a $1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60 = 240 \neq 120$, donc 120 n'est pas un nombre parfait.
3. Caractérisation des nombres parfaits pairs[1].
   (a) – $\boxed{n = 1}$. $2^2 - 1 = 3$ est premier. Donc, $2^1 \times (2^2 - 1) = 6$ est parfait.
   – $\boxed{n = 2}$. $2^3 - 1 = 7$ est premier. Donc, $2^2 \times (2^3 - 1) = 28$ est parfait.
   – $\boxed{n = 3}$. $2^4 - 1 = 15$ n'est pas premier ($15 = 3 \times 5 = ...$). Donc, $2^3 \times (2^4 - 1) = 120$ n'est pas parfait.
   – $\boxed{n = 4}$. $2^5 - 1 = 31$ est premier. Donc, $2^4 \times (2^5 - 1) = 496$ est parfait.
   (b) En poursuivant la démarche engagée dans la question précédente ...
   – $\boxed{n = 5}$. $2^6 - 1 = 63$ n'est pas premier ($63 = 3 \times 21 = ...$). Donc, $2^5 \times (2^6 - 1) = 2016$ n'est pas parfait.
   – $\boxed{n = 6}$. $2^7 - 1 = 127$ est premier. Donc, $2^6 \times (2^7 - 1) = 8128$ est parfait.

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

[1] Le mathématicien Euclide, au IIIème siècle avant J.-C., a découvert et prouvé que si $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.

Par ailleurs, Leonhard Euler, au XVIIIème siècle, a prouvé que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ avec $2^p - 1$ premier.

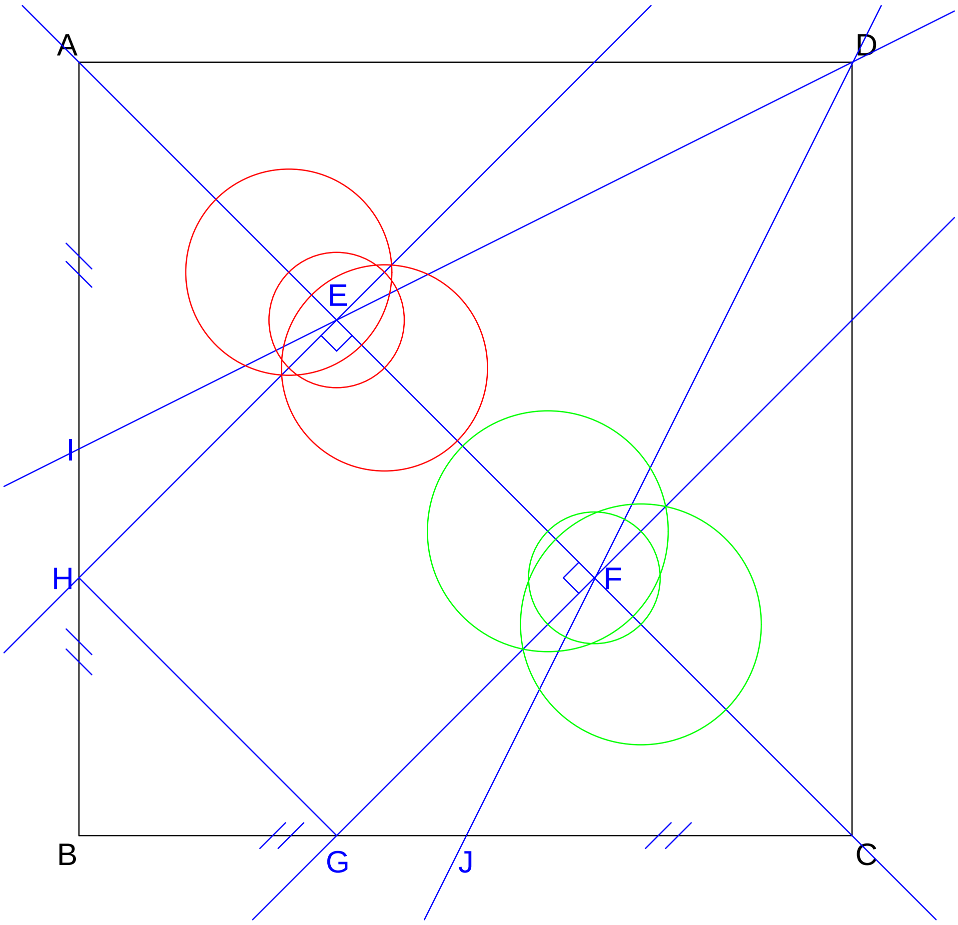
Il est établi que tout nombre parfait pair se termine par 16, 28, 36, 56, 76, ou 96.

Seulement, existe-t-il des nombres parfaits impairs ? On sait que jusque 10^{300}, il n'en existe pas ...

La propriété admise dans l'énoncé du sujet est loin d'être une trivialité.

Exercice 2

1. La figure ...



Construction de la figure :

- On suppose les points A, B, C, D, le carré $ABCD$, le point I milieu du segment $[AB]$ et le point J milieu du segment $[BC]$ placés.
- On trace la droite (AC).
- On trace la droite (DI) qui coupe la droite (AC) en E.
- On trace la droite (DJ) qui coupe la droite (AC) en F.
- On trace (tracés en rouge) la perpendiculaire d à la droite (AC) en E.[2]
- On trace (tracés en vert) la perpendiculaire d à la droite (AC) en F.[3]

[2] Pour tracer la perpendiculaire d à la droite (AC) en E, on trace un cercle γ_1 de centre E qui coupe la droite (AC) en deux points équidistants de E, M_1 et N_1 ; puis un cercle γ_2 de centre M_1 de rayon r (r est choisi strictement plus grand que $\frac{M_1N_1}{2}$) et un cercle γ_3 de centre N_1 de rayon r ; on nomme P_1 l'un des points d'intersection des cercles γ_2 et γ_3 ; et, la droite (EP_1) est la droite d à construire (c'est la médiatrice du segment $[M_1N_1]$).

[3] Pour tracer la perpendiculaire δ à la droite (AC) en F, on trace un cercle Γ_1 de centre F qui coupe la droite (AC) en deux points équidistants de F, M_2 et N_2 ; puis un cercle Γ_2 de centre M_2 de rayon r (r est choisi strictement plus grand que $\frac{M_2N_2}{2}$) et un cercle Γ_3 de centre N_2 de rayon r ; on nomme P_2 l'un des points d'intersection des cercles Γ_2 et Γ_3 ; et, la droite (EP_1) est la droite δ à construire (c'est la médiatrice du segment $[M_2N_2]$).

2. (a) O, le centre du carré $ABCD$ est milieu du segment $[BD]$ (car O est centre de symétrie du carré). Ainsi, le segment $[OA]$ est une médiane du triangle ABD.

   I est milieu du segment $[AB]$, donc le segment $[ID]$ est une médiane du triangle ABD.

   Le point de concours des segments $[OA]$ et $[ID]$ est donc centre de gravité du triangle ABD (intersection de deux médianes).

   Or, O appartient au segment $[AC]$ (car O en est le milieu, comme précédemment pour O milieu du segment $[BD]$), donc le segment $[ID]$ est inclus dans la droite (AC). Puis, le point de concours des segments $[OA]$ et $[ID]$ est aussi le point de concours des droites (ID) et (AC). Et, le centre de gravité du triangle ABD est E.

   $\frac{AE}{AO} = \frac{2}{3}$ (propriété du centre de gravité d'un triangle).

   De $\frac{A0}{AC} = \frac{1}{2}$ (car O est milieu du segment $[AC]$), on obtient $\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AO} \times \frac{A0}{AC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

   (b) La diagonale du carré de côté c mesure $c \times \sqrt{2}$ (ce résultat peut se déduire du théorème de Pythagore). Donc, $AC = 9 \times \sqrt{2}cm$, puis comme $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$, on obtient $AE = 3 \times \sqrt{2}cm$.

   (c) Le triangle AEH est isocèle rectangle en E.

   En effet,
   - l'angle $\widehat{AEH}$ est droit (par construction de la perpendiculaire à la droite (AC) en E) ou $\widehat{AEH} = 90^\circ$,
   - on a $\widehat{HAE} = \frac{1}{2} \times \widehat{BAD}$ (car la diagonale (AC) est axe de symétrie du carré), puis $\widehat{HAE} = \frac{1}{2} \times \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$,
   - on a $\widehat{AHE} = 45^\circ$ (car la somme des angles d'un triangle est de 180°),

   puis, de $\widehat{AEH} = 90^\circ$, on tire que le triangle AEH est rectangle en E et de $\widehat{HAE} = \widehat{AHE}$, on tire que le triangle AEH est isocèle en E.

   Comme le triangle AEH est isocèle en E, on obtient que $EH = AE = 3 \times \sqrt{2}cm$.

   (d) Soit s la symétrie orthogonale d'axe (BD). On a $s(E) = F$ et $s(H) = G$ (sans justification[4]).

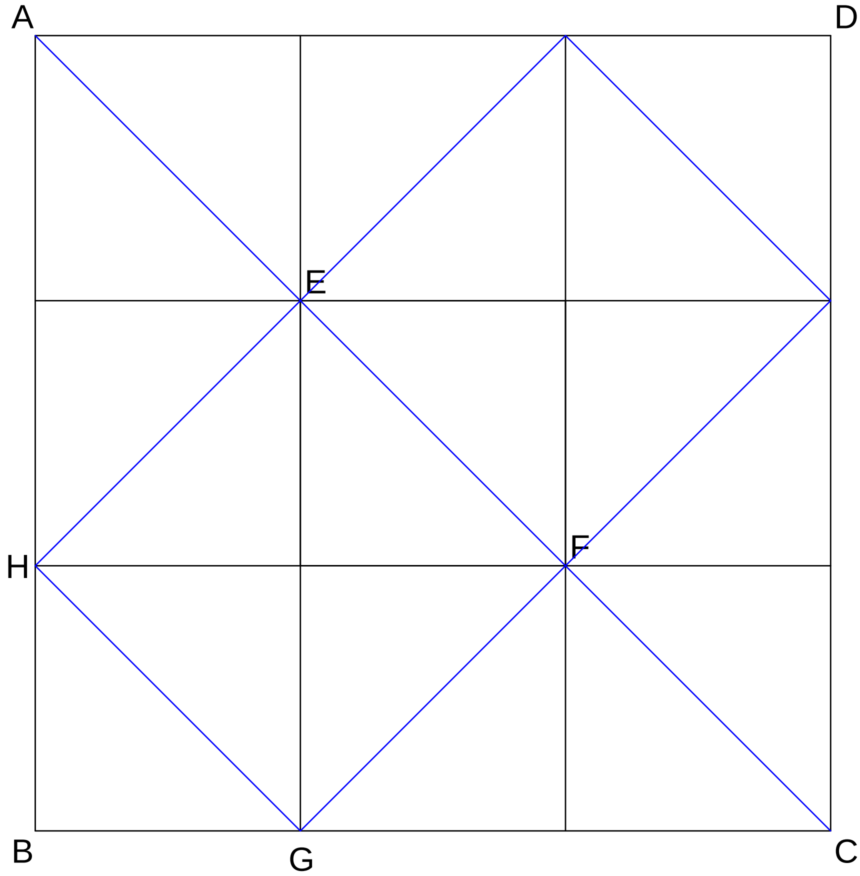
   Par symétrie, $FG = EH = 3\times\sqrt{2}cm$, $FC = EA = 3\times\sqrt{2}cm$ et $EF = AC-AE-FC = 3\times\sqrt{2}cm$.

   (e) Le quadrilatère $EFGH$ admet un axe de symétrie orthogonale qui ne soit pas une diagonale de ce quadrilatère, c'est donc un trapèze isocèle. Le trapèze isocèle $EFGH$ admet un angle droit en E (ou en F), c'est donc un rectangle. Le rectangle $EFGH$ a deux côtés consécutifs égaux (car $EF = FG$) et est donc un $\boxed{\text{carré}}$.

3. (a) Si on pouvait paver le grand carré (i.e. $ABCD$) avec des petits carrés (i.e. du type $EFGH$), alors il existerait un entier naturel k tel que $AB = k \times EF$ ou $9cm = k \times 3 \times \sqrt{2}cm$, ce qui est impossible car $\frac{9}{3\times\sqrt{2}} = \frac{3\times\sqrt{2}}{2}$ n'est pas entier.

[4]Une démonstration : l'axe (BD) est axe de symétrie orthogonale du carré $ABCD$, donc $s(A) = C$, $s(B) = B$, $s(D) = D$; $s(C) = A$; $s((AC)) = (AC)$ (conservation de l'alignement) ; $s(I) = J$ (conservation des milieux) ; $s(J) = I$ (conservation des milieux) ; $s((AC) \cap (ID)) = (AC) \cap (JD)$ ou $s(E) = F$ (conservation de l'alignement) ; $s((AC) \cap (JD)) = (AC) \cap (ID)$ ou $s(F) = E$ (conservation de l'alignement) ; $s(d) = \delta$ (conservation de la perpendicularité) ; $s(\delta) = d$ (conservation de la perpendicularité) ; $s(d \cap (BA)) = \delta \cap (BC)$ ou $s(H) = G$ (conservation de l'alignement) ; $s(\delta \cap (BC)) = d \cap (BA)$ ou $s(G) = H$ (conservation de l'alignement).

(b) On peut paver le grand carré (i.e. $ABCD$) avec des triangles (i.e. du type GHK) :



En effet, le triangle GHK est rectangle en K (car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires) et isocèle tel que $KG = KH = 3cm$ (car KG ou KH sont des demi-diagonales d'un carré de côté $3 \times \sqrt{2}cm$).

On pave d'abord par neuf carrés de côté $3cm$ puis on divise chacun de ces carrés en deux parties superposables en les coupant selon une diagonale.

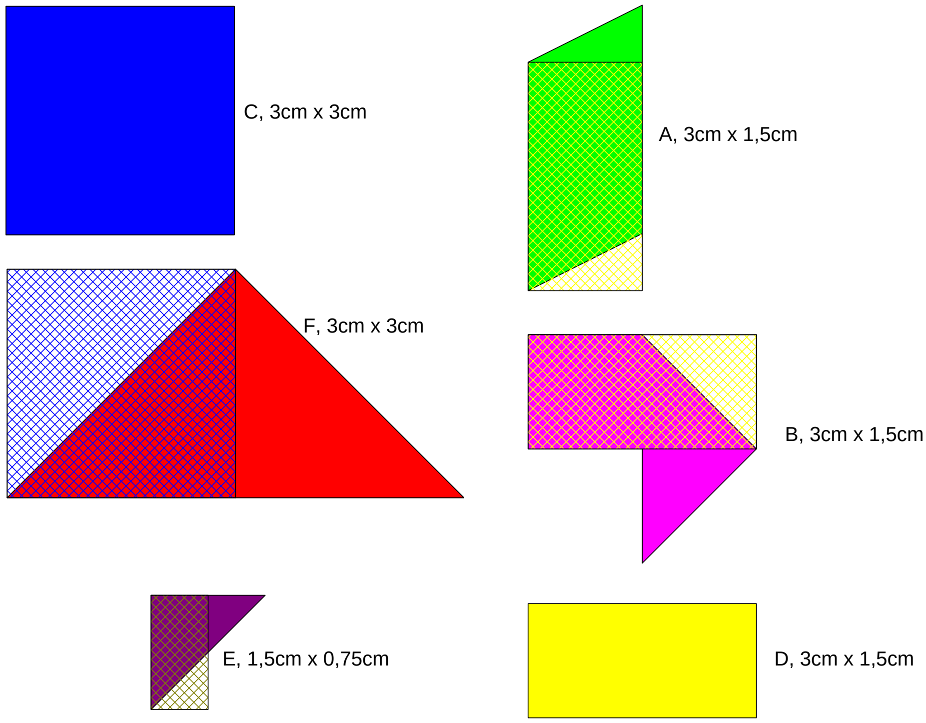
Question complémentaire.

1. La grandeur mise en jeu dans cette activité est l'**aire**.

   Dans cette activité, l'élève doit **comparer** des aires (pour donner des surfaces de même aire et pour ranger les aires de la plus petite à la plus grande ; la comparaison des aires est au programme : "classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire, soit par superposition des surfaces, soit par découpage et recollement des surfaces, soit par pavage des surfaces avec une surface de référence") et cette comparaison est rendue possible par un calcul d'aire (c'est-à-dire au moyen d'un **mesurage** ; au niveau du calcul d'aire, seule la formule donnant l'aire du rectangle est au programme : "calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côté au moins est de dimension entière").

   Ceci justifie le titre "comparaison et mesure".

2. **Procédure attendue** : l'élève décompose (sur sa feuille) les figures en sous-figures qui lui permettent de reconstituer un rectangle en déplaçant (toujours sur sa feuille) ces sous-figures (i.e. décomposer A ou B pour reconstituer D, décomposer F pour reconstituer C), puis il mesure les côtés de ce rectangle obtenu et identifie les rectangles isométriques comme étant de même aire.



Remarque. Pour comparer les aires dans cette première question de l'activité, le calcul de l'aire des rectangles par la formule usuelle "longueur × largeur" n'est pas indspensable. D'ailleurs, le calcul d'aire par la décomposition faite pour la figure E n'est pas au programme puisque les textes demandent que l'une au moins des dimensions soit entière (bien qu'on aurait pu se ramener à un rectangle $6cm \times 0,375$).

Réponse à la question 1 : les figures A, B et D ont même aire ; les figures C et F ont même aire.

3. Pour les élèves qui ont du mal à décomposer les figures en sous-figures qui lui permettent de reconstituer un rectangle en déplaçant ces sous-figures, le maître peut proposer des **ciseaux** pour découper les figures de départ si besoin.

4. Une difficulté naît de l'égalité de certaines aires : "comment ranger des aires par ordre croissant lorsqu'elles sont égales ?" (les inégalités au sens large ne sont pas au programme de l'école !). Sinon, au point de vue méthodologique, il n'y a guère de grande difficulté :
   - la figure E peut s'inclure entièrement dans n'importe quelle figure, ce qui induit qu'elle a la plus petite aire ;
   - la figure D peut s'inclure entièrement dans la figure C ou dans la figure F ; de même, les figures A et B (bien que ce semble plus délicat) peuvent s'inclure entièrement (mais séparément) dans la figure C ou dans la figure F, ce qui induit que les figures A, B et D qui ont même aire (voir question 1 de l'activité) ont une aire plus petite que les figures C ou E qui ont aussi même aire (voir question 1

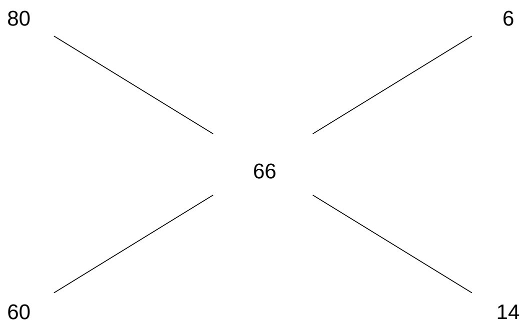
de l'activité).

Exercice 3

1. (a) Pour $15\mathcal{L}$ de vin obtenu selon le mélange proposé, on compte $5\mathcal{L}$ de vin à $0,60F/\mathcal{L}$ (ou $3F$) et $10\mathcal{L}$ de vin à $0,75F/\mathcal{L}$ (ou $7,5F$), pour un total de $3F + 7,5F = 10,5F$. Le prix au litre de ce mélange est donc $10,50F/15\mathcal{L} = 0,70F/\mathcal{L}$.

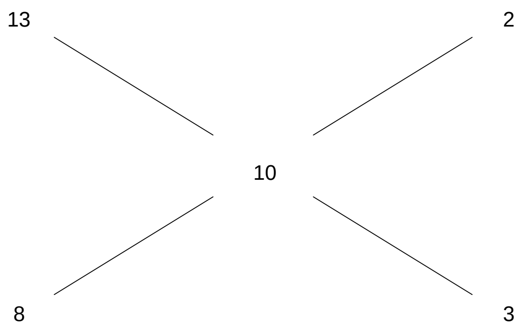
   (b) Dans $15\mathcal{L}$ de vin à $0,70F/\mathcal{L}$, on a $5\mathcal{L}$ de vin à $0,60F/\mathcal{L}$ (ce qui représente $\frac{5\mathcal{L}}{15\mathcal{L}} = \frac{1}{3}$ du mélange) et $10\mathcal{L}$ de vin à $0,75F/\mathcal{L}$ (ce qui représente $\frac{10\mathcal{L}}{15\mathcal{L}} = \frac{2}{3}$ du mélange).

2. "La croix des mélanges ..."



Dans $20\mathcal{L}$ de vin à $0,66F/\mathcal{L}$, on a $6\mathcal{L}$ de vin à $0,80F/\mathcal{L}$ (ce qui représente $\frac{6\mathcal{L}}{20\mathcal{L}} = \frac{3}{10}$ du mélange) et $14\mathcal{L}$ de vin à $0,60F/\mathcal{L}$ (ce qui représente $\frac{14\mathcal{L}}{20\mathcal{L}} = \frac{7}{10}$ du mélange).[5]

3. (a) "La croix des mélanges ..."



Dans les 15 albums à 10€/album (puisque les 15 albums coûtent 150€), on en a $\frac{2 \text{ albums}}{2 \text{ albums}+3 \text{ albums}} = \frac{2}{5}$ (soit $\frac{2}{5} \times 15 = 6$) à 13€/album et $\frac{3 \text{ albums}}{2 \text{ albums}+3 \text{ albums}} = \frac{3}{5}$ (soit $\frac{3}{5} \times 15 = 9$) à 8€/album.

Vérifications : le nombre total d'albums achetés est $6 + 9 = 15$; le coût total de la dépense est $6 \times 13€ + 9 \times 8€ = 78€ + 72€ = 150€$.

   (b) – Le nombre total d'albums achetés est $x + y = 15$.

[5]Remarque concernant ces questions 1 et 2 : cette situation est traitée comme si elle relevait de la proportionnalité, mais il n'en est rien en réalité (si on mélange un grand crû classé à 100€la bouteille et du vinaigre à 1€la bouteille à parts égales, il serait étonnant d'obtenir un vin à 50,5€la bouteille).

– Le coût total de la dépense donne $x \times 13€+y \times 8€= 150€$, soit $x \times 13 + y \times 8 = 150$.

On obtient donc un système à deux équations et deux inconnues à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=15\ [L_1] \\ x\times 13+y\times 8=150\ [L_2] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=15\ [L_1] \\ x\times 5=30\ [L_2-8\times L_1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ y=9 \end{array}\right.$$

(c) Le tableur.
- En cellule **M4** : "**=13*$A4+8*M$1**". Les "$" permettent de copier coller cette formule de façon pertinente dans toute la plage **C2 :V14**.
- Au delà de la colonne **V** ou de la ligne **14**, on excède le coût total de la commande de 150€(car ... >**V4**>**V3**>**V2**= 152 > 150 et car ... >**E14**>**D14**>**C14**= 156 > 150).

  Remarque : on aurait pu ne pas aller au delà de la colonne **R** car le nombre total d'albums est limité à 15.
- Pour résoudre le problème, il suffit de trouver la valeur 150 dans le tableau (en cellule **L8**). Cette cellule correspond à l'achat de 6 albums à 13€et de 9 albums à 8€.

Question complémentaire.

Mise en garde. Le problème proposé aux élèves de CM1/CM2 est différent (hormis le contexte) de celui proposé en question 3 de l'exercice 3 : dans l'énoncé donné à l'élève, rien ne dit qu'Emilie a acheté 15 CD en tout et c'est l'élève qui doit le déduire (la méthode utilisant le tableur de l'exercice 3.c est cependant encore pertinente et permet même de conclure qu'il n'existe qu'une seule possibilité pour dépenser exactement 150€en CD : 6 CD à 13€et 9 CD à 8€).

1. Trois connaissances mathématiques nécessaires (auto-limitation au domaine du calcul; autolimitation aux compétences de cycle 3) :

   domaine du "calcul réfléchi" **Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul additif, soustractif, multiplicatif en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations** (ainsi, la valeur des bons peut se calculer par $15 \times 10€$(règle dite des "zéros" ; ...).

   domaine des "procédures de calcul automatisées" **Calculer des sommes et des différences de nombres entiers** ou décimaux, **par un calcul écrit en ligne ou en colonnes** (ainsi, le coût total des CD peut se calculer comme somme des coûts des CD à 13€et des CD à 8€ ; ...).

   domaine des "procédures de calcul automatisées" **Calculer le produit de deux entiers** ou le produit d'un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), **par un calcul posé** (ainsi, le prix de 6 CD à 13€peut sa calculer par $6\times 13€= 6\times(10+3)€= (6\times 10+6\times 3)€= (60+18)€= 78€$; ...).

   Remarques.

   (a) La locution "connaissance mathématique" n'est pas claire : de quel cycle d'apprentissage ?, de quel domaine (résolution de problème, calcul, ...) ?

   (b) Les compétences citées ci-dessus peuvent s'avérer utiles, mais ne sont pas "nécessaires" : on peut se passer de la multiplication, ...

2. (a) Brice s'est trompé dans son premier essai dans la table de 13 : 13, 26, 39, 42, 55, 68 (sous les ratures) au lieu de 13, 26, 39, 52, 65, 78. Au moment où les additions successives de 13 ont donné lieu à l'utilisation d'une retenue, Brice s'est trompé : $39 + 13$ fait 52 et non pas 42.

   (b) La technique opératoire de l'addition utilisée par Brice est valable : il décompose canoniquement les nombres dans la base décimale ($72 = 70 + 2$; $78 = 70 + 8$) ; puis il additionne ensemble les nombres terminant par un 0 ($70+70 = 140$) et il additionne ensemble les nombres ne se terminant pas par un 0 ($2 + 8 = 10$) ; et enfin, il somme les résultats précédents ($140 + 10 = 150$).

   Cette technique opératoire est très semblable à l'addition "posée en colonne" (elle le justifie même, en quelque sorte).

   Cependant, la technique opératoire de l'addition "posée en colonne" doit être maîtrisée en fin de cycle 2 et de ce point de vue, la technique opératoire additive de Brice (élève de CM1, i.e. de cycle 3) n'est pas "pertinente".

3. (a) **Laura**. La **procédure** de Laura est erronée : elle calcule correctement la somme dont Emilie dispose (15×10€$= 150$€) ; elle multiplie ensemble correctement les prix unitaires des CD (quel est le sens d'un tel résultat ?) ; elle multiplie ce produit des prix unitaires par la somme dont Emilie dispose (quel est le sens d'un tel résultat ?). De plus, le **calcul** de 104×150 est erroné : $104 \times 150 = 104 \times (100 + 50 + 0) = 104 \times 0 + 104 \times 50 + 104 \times 100$, 104×0 est calculé correctement et bien positionné, mais 104×50 est calculé comme 14×50 (oubli du "0" du nombre 104) et est bien positionné, puis 104×100 est mal calculé et mal positionné (à sa décharge, en cycle 3, on multiplie en général un nombre à moins de trois chiffres par un nombre à moins de deux chiffres). Le **résultat** est incorrect.

   (b) **Maxime**. La **procédure** de Maxime est correcte : il commence par dresser les tables de 8 et de 13, puis prend un nombre (au hasard ?) dans la table de 13 et essaie d'obtenir 150 par ajouts successifs de 8 (il essaiera ainsi avec les nombres 130, 117, 104, puis enfin, 78) (remarque : lorsqu'il traite enfin le 78, il se rend compte qu'au lieu d'ajouter itérativement 8, il peut ajouter n'importe quel nombre dans la table de 8). Il s'agit d'une procédure par tâtonnement qui aboutit et qui est pertinente (remarque : dans la copie de Boris qui présente une solution correcte, on peut considérer que Boris a eu de la chance de tabler sur 72 dans la table de 8). Au niveau du **calcul**, dans la deuxième colonne, $117 - 13$ donne 104 et non 114, dans la première ligne de la troisième colonne, $117 - 13$ donne 104 et non 101, ... on peut donc trouver quelques erreurs, mais ces erreurs n'ont pas d'incidence sur le **résultat** qui est correct (il s'agit d'une bonne interprétation de l'écriture $78 + 72 = 150$).