Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2008 du sujet de Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

Denis Vekemans [*]

Exercice 3

1. On va noter $\overline{abc}$ le nombre cherché dans la base décimale : a chiffre des centaines, b chiffre des dizaines et c chiffre des unités.
   - "nombre à trois chiffres" impose $a \neq 0$;
   - "la somme des chiffres est égale à 14" induit $a + b + c = 14$;
   - "ce nombre est plus grand que son *retourné*" et "la différence entre ce nombre et son *retourné* est 99" fournit $\overline{abc} - \overline{cba} = 99$ ou $(a \times 100 + b \times 10 + c \times 1) - (c \times 100 + b \times 10 + a \times 1) = 99$ ou encore $99 \times a - 99 \times c = 99$, puis $a - c = 1$;
   - "la différence entre le double du chiffre des dizaines et le triple du chiffre des centaines est égale à 2" entraîne $2 \times b - 3 \times a = 2$ ou bien $2 \times b - 3 \times a = -2$.

   En résumé, on est amené à résoudre les deux systèmes diophantiens (ce qui signifie que les inconnues sont des nombres entiers) suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \ : \ \begin{cases} a + b + c = 14 \\ c = a - 1 \\ b = \frac{3}{2} \times a + 1 \end{cases}$$

   et

$$(\mathcal{S}_2) \ : \ \begin{cases} a + b + c = 14 \\ c = a - 1 \\ b = \frac{3}{2} \times a - 1 \end{cases}$$

   Par substitution dans la première ligne de $(\mathcal{S}_1)$, on obtient $\frac{7}{2} \times a = 14$ puis $a = 4$, $b = 7$, et $c = 3$: $(\mathcal{S}_1)$ fournit la solution 473.

   Par substitution dans la première ligne de $(\mathcal{S}_2)$, on obtient $\frac{7}{2} \times a = 16$ puis $a = \frac{32}{7}$, ce qui contredit le fait que a soit entier : $(\mathcal{S}_2)$ ne fournit pas de solution.

[*] Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

2. (a) La conjecture de l'élève s'applique dans le cas du nombre 473 car dans ce nombre, le chiffre des dizaines est somme des chiffres des unités et des centaines (i.e. $7 = 4 + 3$). De plus, la conjecture s'avère être exacte pour cet exemple, car $473 = 11 \times 43$ est divisible par 11.

   (b) La conjecture de l'élève est toujours exacte (quel que soit l'exemple) : en effet, on peut écrire $\overline{a(a+b)b}$ ce nombre dans la base décimale qui vaut donc $a \times 100 + (a+b) \times 10 + b = 110 \times a + 11 \times b = 11 \times (10 \times a + b)$ et est par conséquent divisible par 11.

   (c) $605 = 11 \times 55$ est un multiple de 11 dont le chiffre des dizaines n'est pas somme des chiffres des unités et des centaines (i.e. $0 \neq 6 + 5$).