Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2008 du sujet d'Amiens, Lille, Rouen, Paris, Créteil, Versailles

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. Les droites (IJ) et Δ sont sécantes en E et les droites (OH) et (JT) sont parallèles (car toutes deux perpendiculaires à la droite Δ – est-il nécessaire de rappeler que la tangente au cercle C_3 de centre J en un point T est perpendiculaire à la droite (JT) vu que l'angle droit est déjà donné par la figure ? –), dès lors, nous pouvons utiliser le théorème de Thalès dans la configuration du triangle et nous obtenons
$$\frac{EO}{EJ} = \left(\frac{EH}{ET} =\right) \frac{OH}{JT},$$
puis
$$\frac{3 \times r}{5 \times r} = \frac{a}{r},$$
ou encore
$$a = \frac{3 \times r}{5}.$$
2. Le nombre r étant entier naturel non nul, le nombre $3 \times r$ l'est aussi, ainsi le nombre a s'exprime comme le quotient de deux entiers naturels non nuls et est par conséquent un nombre rationnel positif non nul.
3. A partir de $a = \frac{3 \times r}{5}$, nous pouvons déduire que $a = \frac{6 \times r}{10}$. Le nombre r étant entier naturel non nul, le nombre $6 \times r$ l'est aussi, ainsi le nombre a s'exprime comme le quotient d'un nombre naturel non nul par une puissance de 10 ($10 = 10^1$) et est par conséquent un nombre décimal non nul.
4. $a = \frac{3 \times r}{5}$ équivaut à $5 \times a = 3 \times r$. Si a est entier naturel, nous déduisons d'abord que $3 \times r$ est un multiple de 5, puis, par le théorème de Gauss, comme 3 et 5 sont premiers entre eux, que r est un multiple de 5. Réciproquement, si r est un multiple de 5, il vient aisément que a est un entier naturel. a est entier naturel équivaut donc à r est un multiple de 5.
5. Si $r = 5$, on obtient $a = 3$ qui est un nombre premier. a peut donc être un nombre premier ! Remarque : 5 est la seule valeur de r pour laquelle a est premier.

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

6. Le triangle OHB est rectangle en H. Dès lors, nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle et il vient que
$$OH^2 + HB^2 = OB^2,$$
ou
$$HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - \frac{9 \times r^2}{25}} = \sqrt{\frac{16 \times r^2}{25}} = \frac{4 \times r}{5}.$$
7. Le triangle OAB est isocèle en O, de hauteur (OH). Comme dans un triangle isocèle, la hauteur est également médiane, il vient que le pied H de la hauteur est milieu du segment $[AB]$. Ensuite,
$$b = AB = 2 \times HB = 2 \times \frac{4 \times r}{5} = \frac{8 \times r}{5}.$$
8. Comme dans la question 4, nous obtenons que b est un nombre entier naturel équivaut à r est un multiple de 5. Si b doit être un nombre premier, alors, il faut déjà que r soit un multiple de 5 ou qu'il existe un nombre entier naturel s tel que $r = 5 \times s$ (par définition). Ainsi, $b = \frac{8 \times r}{5} = \frac{8 \times 5 \times s}{5} = 8 \times s$ et b est un multiple de 8. b ne peut donc jamais être premier car il est divisible par 8 qui lui-même n'est pas premier.

Exercice 2

1. (a) On donne :
$$57148468 = 3361674 \times 17 + 10.$$
Nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de 57148468 par 17 dans laquelle 3361674 est le quotient et 10 est le reste (10 vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).

(b) On donne :
$$84279733 = 4957630 \times 17 + 23.$$
Une petite transformation nous permet alors d'obtenir
$$\begin{aligned} 84279733 &= 4957630 \times 17 + 17 + 6 \\ &= (4957630 + 1) \times 17 + 6 \\ &= 4957631 \times 17 + 6 \end{aligned}$$
Nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de 84279733 par 17 dans laquelle 4957631 est le quotient et 6 est le reste (6 vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).

(c)
$$\begin{aligned} 57148468 + 84279733 &= 3361674 \times 17 + 10 + 4957631 \times 17 + 6 \\ &= (3361674 + 4957631) \times 17 + 10 + 6 \\ &= 8319305 \times 17 + 16 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de $57148468 + 84279733$ par 17 dans laquelle 8319305 est le quotient et 16 est le reste (16 vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).

$$\begin{aligned} 2 \times 57148468 &= 2 \times (3361674 \times 17 + 10) \\ &= 6723348 \times 17 + 20 \\ &= 6723348 \times 17 + 17 + 3 \\ &= (6723348 + 1) \times 17 + 3 \\ &= 6723349 \times 17 + 3 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de 2×57148468 par 17 dans laquelle 6723349 est le quotient et 3 est le reste (3 vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).

2. Pour ces questions, on va supposer que a et a' sont des entiers naturels. On a $a = 17 \times q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 16$ et $a' = 17 \times q' + r'$ avec $q' \in \mathbb{N}$, $r' \in \mathbb{N}$, $0 \leq r' \leq 16$.

   (a)

$$\begin{aligned} a + a' &= 17 \times q + r + 17 \times q' + r' \\ &= 17 \times (q + q') + (r + r') \end{aligned}$$

Notons que comme $0 \leq r \leq 16$ et $0 \leq r' \leq 16$, $0 \leq r + r' \leq 32$. Ainsi, deux cas sont à envisager ...

- Premier cas : $0 \leq r + r' \leq 16$. Dans $a + a' = 17 \times (q + q') + (r + r')$, nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de $a + a'$ par 17 dans laquelle $q + q'$ est le quotient et $r + r'$ est le reste ($r + r'$ vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).
- Deuxième cas : $17 \leq r + r' \leq 32$. Une petite transformation nous permet alors d'obtenir $a + a' = 17 \times (q + q' + 1) + (r + r' - 17)$ et nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de $a + a'$ par 17 dans laquelle $q + q' + 1$ est le quotient et $r + r' - 17$ est le reste ($r + r' - 17$ vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).

   (b)

$$\begin{aligned} 2 \times a &= 2 \times (17 \times q + r) \\ &= 17 \times (2 \times q) + (2 \times r) \end{aligned}$$

Notons que comme $0 \leq r \leq 16$, $0 \leq 2 \times r \leq 32$. Ainsi, deux cas sont à envisager ...

- Premier cas : $0 \leq 2 \times r \leq 16$. Dans $2 \times a = 17 \times (2 \times q) + (2 \times r)$, nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de $2 \times a$ par 17 dans laquelle $2 \times q$ est le quotient et $2 \times r$ est le reste ($2 \times r$ vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).

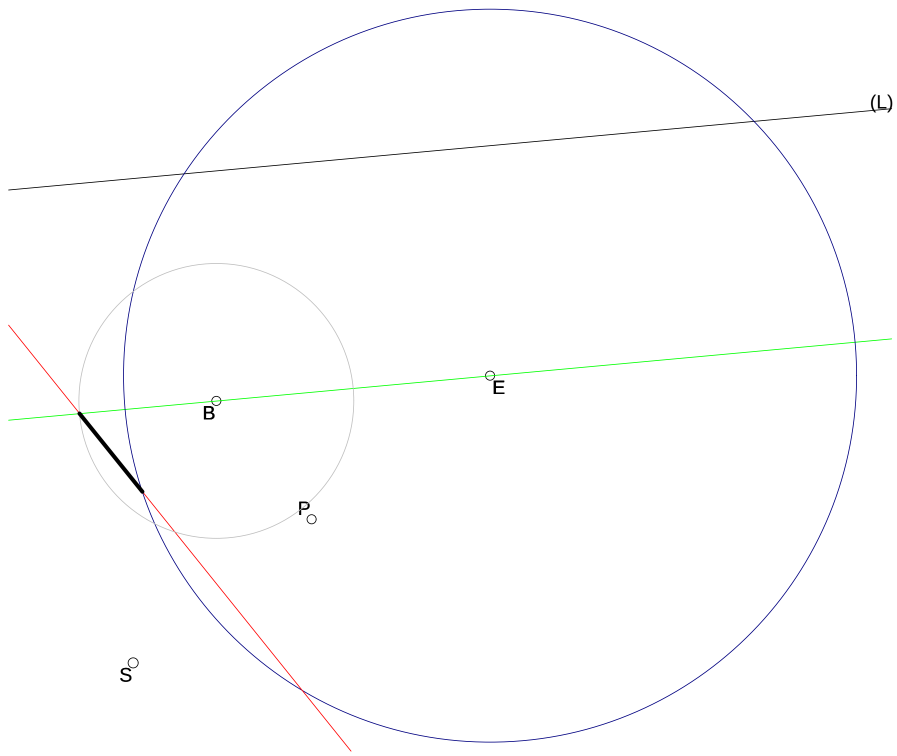
– Deuxième cas : $17 \leq 2 \times r \leq 32$. Une petite transformation nous permet alors d'obtenir $2 \times a = 17 \times (2 \times q + 1) + (2 \times r - 17)$ et nous reconnaissons l'écriture algébrique de la division euclidienne de $2 \times a$ par 17 dans laquelle $2 \times q + 1$ est le quotient et $2 \times r - 17$ est le reste ($2 \times r - 17$ vérifie bien la condition sur le reste qui est d'être un entier naturel strictement plus petit que le diviseur, ici 17).

Questions complémentaires. Non corrigée !

Exercice 3

1. Soient D et D' les deux droites parallèles à la ligne à haute tension (i.e. la droite L) situées à une distance de 500m. Le trésor est en dehors de la zone comprise entre les droites parallèles D et D'.
2. Soit Γ le cercle de centre l'école (i.e. le point E) et de rayon 800m. Le trèsor est en dehors de ce cercle.
3. Soit Γ' le cercle de centre la bibliothèque (i.e. le point B) et de rayon 300m. Le trèsor est à l'intérieur de ce cercle.
4. Soit Δ la médiatrice du segment ayant pour extrémités le stade (i.e. le point S) et la piscine (i.e. le point P). Le trésor est sur cette médiatrice.
5. A l'échelle $\frac{1}{10000}$, 1cm sur le dessin représentent 100m en réalité.

   La figure suivante n'est pas à la bonne échelle !



Il s'agit de la zone en trait épais noir sur la figure ...

Questions complémentaires. Non corrigée !