Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2007 du sujet d'Amiens, Lille, Rouen, Paris, Créteil, Versailles

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. Soient x, $x+1$ et $x+2$ les trois nombres naturels successifs dont la somme vaut 207. Dans ce cas, $x+(x+1)+(x+2) = 3 \times x + 3 = 207$ puis $3 \times x = 207 - 3 = 204$ et $x = \frac{204}{3} = 68$. On vérifie que $68 + 69 + 70 = 207$.
2. Soient x, $x+1$ et $x+2$ les trois nombres naturels successifs dont la somme vaut 329. Dans ce cas, $x+(x+1)+(x+2) = 3 \times x + 3 = 329$ puis $3 \times x = 329 - 3 = 326$ et $x = \frac{326}{3} = 108 + \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$. On ne peut donc pas écrire 329 comme somme de trois entiers naturels successifs.
3. "N est somme de trois entiers naturels consécutifs" équivaut à "$N \geq 3$ est divisible par 3".
   - Soit N un entier naturel. Soient x, $x+1$ et $x+2$ les trois nombres naturels successifs dont la somme vaut N. Dans ce cas, $x+(x+1)+(x+2) = 3 \times x + 3 = N$ ou $3 \times x + 3 = N$.
     Dès lors, on déduit que (1) : "$N \geq 3$" [en effet, $x \geq 0$ donc $3 \times x + 3 \geq 3$] et que (2) : "N est divisible par 3" [en effet, $3 \times x$ est divisible par 3 et 3 est divisible par 3 donc, par somme, $3 \times x + 3$ est divisible par 3].
   - Réciproquement, si $N \geq 3$ est divisible par 3, on peut écrire $N = 3 \times \kappa$ avec $\kappa \geq 1$ un entier naturel. Et, $N = (\kappa - 1) + \kappa + (\kappa + 1)$ est somme de trois entiers naturels consécutifs $\kappa - 1$, κ, $\kappa + 1$.
4. $N = \overline{47d5}$ un nombre qui est somme de trois entiers naturels consécutifs. D'après la question précédente, cela induit que $N = \overline{47d5}$ est divisible par 3. Cependant, d'après le critère de divisibilité par 3, cela induit encore que $4 + 7 + d + 5 = 16 + d$ est divisible par 3 puis que $d = 2$ ou $d = 5$ ou $d = 8$.

   Les seules solutions sont donc $4725 = 1574 + 1575 + 1576$; $4755 = 1584 + 1585 + 1586$; et $4785 = 1594 + 1595 + 1596$.

Questions complémentaires.

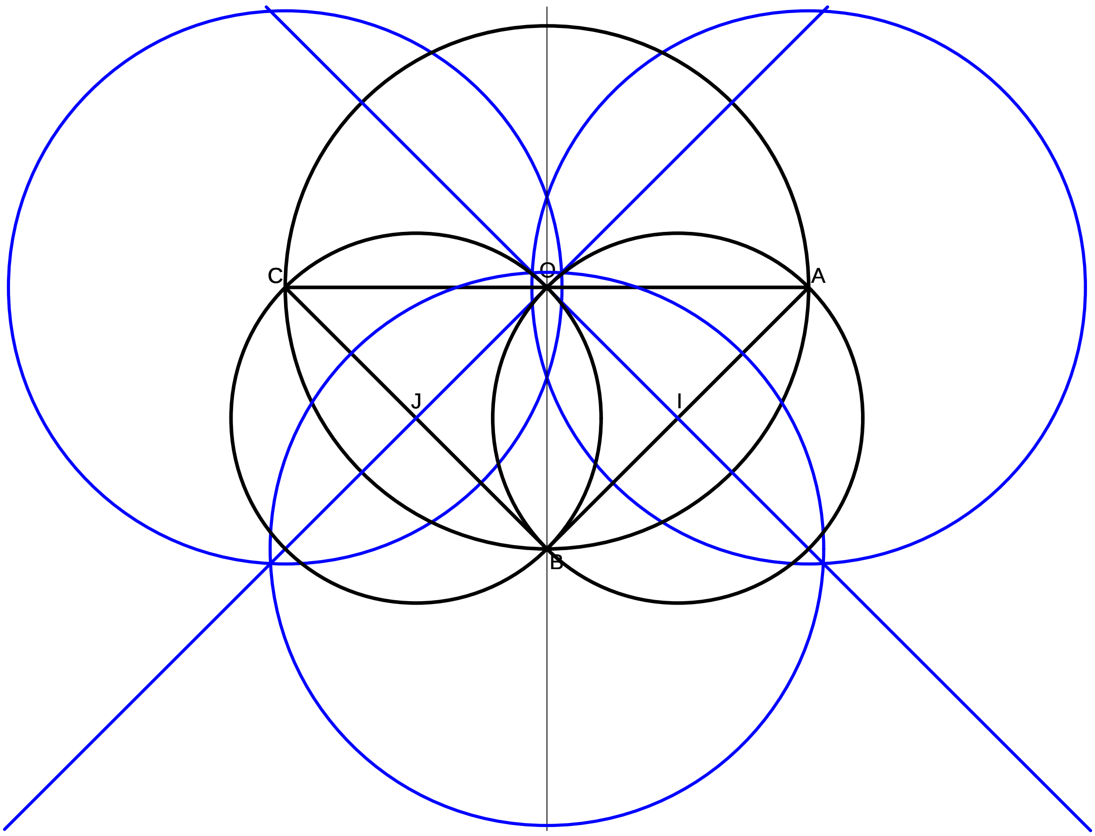
*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

1. • Elève A : il procède par **essais successifs organisés** : $20+21+22 = 63$, c'est trop ; $12+13+14 = 39$, c'est insuffisant ; $13+14+15 = 42$, c'est insuffisant ; $17+18+19 = 54$, c'est trop ; $16+17+18 = 51$, ça convient.
   Il ne commet pas d'erreur ni dans les calculs, ni dans la procédure.
   • Elève B : il utilise la **division euclidienne** pour estimer ce que valent "approximativement" chacun des trois nombres à additionner (ce qui dénote une bonne réflexion sur la notion d'ordre de grandeur) mais n'utilise pas la division euclidienne de façon experte (comme il pourrait le faire, par exemple, en passant de $51 = 3\times17$ à $51 = 17+17+17$ puis à $51 = (17-1)+17+(17+1) = 16+17+18$) ; ensuite, de $15 + 16 + 17 = 48$ (qui est une somme de trois nombres entiers naturels consécutifs contenant le terme 17), il constate qu'en changeant le 15 en 18, il augmente la somme de 3 tout en conservant trois nombres entiers naturels consécutifs et qui lui permet de passer de 48 à 51 (ce qui montre que l'élève s'est bien approprié le problème et qu'il a pu gérer plusieurs contraintes simultanément : "le fait que les nombres à sommer doivent être consécutifs" et "le fait que la somme à atteindre est de 51"), ce qui était demandé.
   Il ne commet pas d'erreur ni dans les calculs, ni dans la procédure.
   • Elève C : comme l'élève A, il procède par **essais successifs organisés** : $19 + 20 + 21 = 60$, c'est trop ; $10+11+12 = 33$, c'est insuffisant ; $15+16+17 = 48$, c'est insuffisant ; $16+17+18 = 41$ (avec une erreur de calcul qui donne 41 comme résultat au lieu de 51), c'est insuffisant ; $17+18+19 = 54$, c'est trop ; mais ensuite, l'organisation des essais pâtit de l'erreur de calcul constatée : en effet, si $15+16+17 = 48$ est trop petit, si $17+18+19 = 54$ est trop grand et si $16+17+18$ ne convient pas (à cause de l'erreur de calcul), le problème devient insurmontable, et suivent des essais désorganisés : $18 + 19 + 10$, $13 + 14 + 15$.
   L'élève commet une seule erreur de calcul, et par malchance, c'est sur l'essai s'avérait être le bon. Quand les essais commencent à se désorganiser, l'élève devrait pouvoir conclure que quelque chose ne colle pas et chercher une erreur de calcul, mais c'est toujours difficile de se remettre en question ...

Exercice 2

1. Pour la reproduction de la figure (on suppose qu'il faut la reproduire à l'identique, c'est-à-dire en conservant les longueurs) ...
   Remarque : pour tracer la **médiatrice** Δ d'un segment $[AB]$, on trace un cercle C_1 de centre A et de rayon r (qui soit choisi strictement plus grand que $fracAB2$), puis on trace un cercle C_2 de centre B et de même rayon r, les cercles C_1 et C_2 se coupent en deux points M et N, et on trace enfin la droite (MN) qui est alors médiatrice Δ du segment $[AB]$ (car il s'agit d'une droite qui passe par deux points M et N équidistants de A et B).
   • On reporte un segment $[AC]$ de mesure AC ;
   • on trace la médiatrice δ du segment $[AC]$;
   • on nomme O l'intersection des droites (AC) et δ (O est milieu du segment $[AC]$) ;

- on trace le cercle Γ de diamètre $[AC]$ (il a pour centre O et il passe par A) ;
- on nomme B l'une des intersections entre la droite δ et le cercle Γ ;
- on trace la médiatrice δ_1 du segment $[AB]$;
- on trace la médiatrice δ_2 du segment $[BC]$;
- on nomme I l'intersection des droites (AB) et δ_1 (I est milieu du segment $[AB]$) ;
- on nomme J l'intersection des droites (BC) et δ_2 (J est milieu du segment $[BC]$) ;
- on trace le cercle Γ_1 de diamètre $[AB]$ (il a pour centre I et il passe par B) ;
- on trace le cercle Γ_2 de diamètre $[BC]$ (il a pour centre J et il passe par B).



2. - L'aire $\mathcal{A}$ du demi-disque de diamètre $[AC]$ (tracé) est $\frac{\pi\times(\frac{7}{2}cm)^2}{2} = \frac{49\times\pi}{8}cm^2$.
   - D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en B, on a : $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 49cm^2$. Cependant, comme le triangle ABC est isocèle en B, on obtient $AB = BC = \sqrt{\frac{49cm^2}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}cm = \frac{7\times\sqrt{2}}{2}cm$.
   - L'aire $\mathcal{A}_t$ du triangle ABC est $\frac{AB\times BC}{2} = \frac{\frac{7\times\sqrt{2}}{2}cm\times\frac{7\times\sqrt{2}}{2}cm}{2} = \frac{49}{4}cm^2$
   - L'aire $\mathcal{A}_1$ du demi-disque de diamètre $[AB]$ (tracé) est $\frac{\pi\times(\frac{7\times\sqrt{2}}{4}cm)^2}{2} = \frac{49\times\pi}{16}cm^2$.
   - L'aire $\mathcal{A}_2$ du demi-disque de diamètre $[BC]$ (tracé) est $\frac{\pi\times(\frac{7\times\sqrt{2}}{4}cm)^2}{2} = \frac{49\times\pi}{16}cm^2$.
   - La relation $\mathcal{A}_t+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}+\mathcal{A}_T$ où $\mathcal{A}_T$ est l'aire totale des surfaces grisées (la relation est obtenue

par deux décompositions différentes de la figure de l'énoncé) donne

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T &= \mathcal{A}_t + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A} \\ &= \frac{49}{4}cm^2 + \frac{49\times\pi}{16}cm^2 + \frac{49\times\pi}{16}cm^2 - \frac{49\times\pi}{8}cm^2 \\ &= \frac{49}{4}cm^2\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Les droites (AC), (BD), (IK), (JL) sont les quatre axes de symétrie de la figure.
2. Par la symétrie de centre O, D a pour image B, U a pour image P, K a pour image I, et le triangle DUK a pour image le triangle BPI.
   (a) AIL est un triangle **isocèle rectangle** en A, ...
   - rectangle en A car $\widehat{LAI} = \widehat{DAB} = 90^\circ$ (angle droit du carré) ;
   - isocèle car $AB = AD$ (puisque $ABCD$ est un carré), puis $AI = \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} = AL$ (puisque I est milieu du segment $[AB]$ et L est milieu du segment $[AD]$).

   (b) De $LM = MN = NI$, on tire $LM = MN = NI = \frac{LI}{3}$. Cependant, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle LAI rectangle en A, on a : $LA^2 + AI^2 = LI^2$, puis $LI = \sqrt{(\frac{6cm}{2})^2 + (\frac{6cm}{2})^2} = 3\times\sqrt{2}cm$. Par suite, $LM = MN = NI = \frac{LI}{3} = \sqrt{2}cm$.

   (c) $IJKL$ est un **carré**. En effet,
   - on peut calculer IJ, JK et KL de la même manière qu'on a calculé LI ; ainsi on obtient $IJ = JK = KL = LI = 3\times\sqrt{2}cm$; et le quadrilatère $IJKL$ est un losange (puisqu'il a ses quatre côtés égaux en mesure) ;
   - ainsi que LAI est un triangle isocèle rectangle en A (ce qui induit en particulier que $\widehat{AIL} = 45^\circ$), on peut montrer que IBJ est un triangle isocèle rectangle en B (ce qui induit en particulier que $\widehat{JIB} = 45^\circ$) ; puis on peut calculer l'angle $\widehat{LIJ}$ par $\widehat{LIJ} = \underbrace{\widehat{AIB}}_{=180^\circ} - \underbrace{\widehat{AIL}}_{=45^\circ} - \underbrace{\widehat{JIB}}_{=45^\circ} = 90^\circ$; et par conséquent, le quadrilatère $IJKL$ est un losange qui possède un angle droit donc un carré.
3.
   - On suppose que les points A et B sont placés en des intersections du quadrillage et que le segment $[AB]$ est inclus dans la trame du quadrillage (*remarque* : en fait si les points A et B sont placés en des intersections du quadrillage, alors le segment $[AB]$ est forcément inclus dans la trame du quadrillage, mais ce commentaire n'est pas exigible).
   - Le point I est alors en une intersection du quadrillage (puisque $AI = 3cm$ et $3 \in \mathbb{N}$). Ensuite, le segment $[AD]$ est inclus dans la trame du quadrillage (car la perpendiculaire à toute droite de la trame du quadrillage passant par une intersection du quadrillage est incluse dans la trame du quadrillage). Puis, les points D (puisque $AD = 6cm$ et $6 \in \mathbb{N}$) et L (puisque $AL = 3cm$ et $3 \in \mathbb{N}$) sont en des intersections du quadrillage. De même les points C, O, J et K sont aussi en des intersections du quadrillage.
   - – Soit M_1 le point du segment $[AD]$ tel que $AM_1 = 2cm$. Le point M_1 est alors en une intersection du quadrillage (puisque $AM_1 = 2cm$ et $2 \in \mathbb{N}$). La trame du quadrillage comporte donc une droite

d_{M_1} passant par M_1 et qui est perpendiculaire à la droite (AD). Mais on a alors L, M_1 et A qui sont lus dans le même ordre que L, M et I et tels que $\frac{LM_1}{LA} = \frac{LM}{LI} = \frac{1}{3}$, donc par la **réciproque du théorème de Thalès**, les droites (M_1M) et (AI) sont parallèles, puis comme la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AD), la droite (M_1M) est aussi perpendiculaire à la droite (AD). Il s'ensuit que la droite (M_1M) est incluse dans la trame du quadrillage (c'est la droite d_{M_1}).

– Soit M_2 le point du segment $[AB]$ tel que $AM_2 = 1cm$. Le point M_2 est alors en une intersection du quadrillage (puisque $AM_2 = 1cm$ et $1 \in \mathbb{N}$). La trame du quadrillage comporte donc une droite d_{M_2} passant par M_2 et qui est perpendiculaire à la droite (AB). Mais on a alors I, M_2 et A qui sont lus dans le même ordre que I, M et L et tels que $\frac{IM_2}{IA} = \frac{IM}{IL} = \frac{2}{3}$, donc par la **réciproque du théorème de Thalès**, les droites (M_2M) et (AL) sont parallèles, puis comme la droite (AL) est perpendiculaire à la droite (AB), la droite (M_2M) est aussi perpendiculaire à la droite (AB). Il s'ensuit que la droite (M_2M) est incluse dans la trame du quadrillage (c'est la droite d_{M_2}).

M est alors en une intersection du quadrillage (car sur deux droites d_{M_1} et d_{M_2} perpendiculaires et incluses dans la trame du quadrillage).

De même, les points N, P, R, S, T, U et V sont en des intersections du quadrillage.

Donc, **le quadrillage facilite le placement de chacun des points** puisque tous les points nommés dans la figure sont alors en des intersections du quadrillage.

4. L'aire du carré $ABCD$, $\mathcal{A}_{ABCD}$, est : $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = (6cm)^2 = 36cm^2$. L'aire du carré $IJKL$, $\mathcal{A}_{IJKL}$, est : $\mathcal{A}_{IJKL} = IL^2 = (3 \times \sqrt{2}cm)^2 = 18cm^2$. Puis, $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \times \mathcal{A}_{IJKL}$.
5. Soit H le pied de la hauteur du triangle AIL issue de A. L'aire du triangle ALM, $\mathcal{A}_{ALM}$ est : $\mathcal{A}_{ALM} = \frac{LM \times AH}{2}$. L'aire du triangle AMN, $\mathcal{A}_{AMN}$ est : $\mathcal{A}_{AMN} = \frac{MN \times AH}{2}$. L'aire du triangle ANI, $\mathcal{A}_{ANI}$ est : $\mathcal{A}_{ANI} = \frac{NI \times AH}{2}$. Puis, de $LM = MN = NI$, on déduit $\mathcal{A}_{ALM} = \mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{ANI}$.

Questions complémentaires.

1. Voici une question avec une grande part d'implicite ...
   – Au niveau des outils mis à disposition de l'élève, on supposera que seules la **règle graduée** et l'**équerre** sont autorisées ...
   – On suppose que **la figure à reproduire est donnée sur papier uni**. Ceci induit que la prise d'information n'est pas modifiée par le support : l'élève doit toujours utiliser sa règle graduée pour mesurer les divers segments qui constituent la figure, il doit toujours utiliser l'équerre pour vérifier si des angles sont droits ou non !

   Ainsi, la question se résume à analyser les modifications dans la phase de reproduction, la phase de prise d'informations étant dépassée.

   - Le papier qui va certainement aider le plus les élèves est le papier à petit carreaux. Voir pour cela la partie disciplinaire de l'exercice : tous les points nommés sont en des intersections de ce quadrillage.
   - Le papier millimétré présente le même avantage que précédemment (tous les points nommés sont en des intersections de ce quadrillage) mais si avec les petits carreaux, le mesurage peut s'effectuer par comptage ($3cm$, d'où 6 petits carreaux ; ...), sur papier millimétré, le comptage peut s'avérer plus laborieux ($3cm$, d'où $30mm$) et être source d'erreur.

- Le papier à grands carreaux (vu sa maille de $8mm$ ...) quant à lui ne permet pas à tous les points d'être en des intersections du quadrillage (si le segment $[AB]$ est porté par la trame du quadrillage) et certains segments ne sont pas inclus dans la trame du quadrillage (ce segments seront alors plus difficile à tracer pour les élèves).

2. On peut citer comme prérequis :
   - savoir prendre une mesure et la reporter à l'aide de la règle graduée (certaines mesures sont entières, comme AD, mais d'autres devront être approchées, comme LM) ;
   - savoir repérer un angle droit et le reporter à l'aide de l'équerre ;
   - savoir ordonner sa démarche pour construire une figure complexe (il est plus facile de partir du carré $ABCD$ que du triangle AMN, par exemple).
3. L'élève pourrait découper le carré $ABCD$ puis le carré $IJKL$ dans cette même figure et ce carré $ABCD$ avec les triangles reliquats : AIL, BJI, CKJ et DLK pour conclure qu'il faut deux fois le carré $IJKL$ pour couvrir sans excès le carré $ABCD$.

Exercice 4

1. Sur la graduation supérieure, le pas est de 1 (en effet, on peut placer 1 sur la graduation entre 0 à 2 car l'échelle étant régulière, le milieu indique la moyenne $\frac{0+2}{2} = 1$). Le surcomptage permet de conclure que $12 = 10 + 1 + 1$ sur la graduation supérieure correspond au 18 (lecture directe) sur la graduation inférieure.
2. De la même manière, le surcomptage permet de conclure que $7 = 5 + 1 + 1$ sur la graduation supérieure correspond au 16 (lecture directe) sur la graduation inférieure. Ensuite, ajouter 5 graduations correspond sur la graduation supérieure à ajouter 5 (le pas étant 1) et sur la graduation inférieure à ajouter 2 (observable pour le passage de 14 à 16, par exemple, le pas est donc de $\frac{2}{5}$). Partant de 7 sur la graduation supérieure qui correspond au 16 sur la graduation inférieure, 2000×1 graduations après, on arrive donc à $7+1\times 2000 = 2007$ (c'est le but) sur la graduation supérieure et à $16+\frac{2}{5}\times 2000 = 816$ sur la graduation inférieure. Ainsi, 2007 sur la graduation supérieure correspond au 816 sur la graduation inférieure.
3. De même, partant de 2 sur la graduation supérieure qui correspond au 14 sur la graduation inférieure, $14 \times \frac{5}{2} = 35$ graduations avant, on arrive donc à $2 - 1 \times 35 = -33$ sur la graduation supérieure et à $14 - \frac{2}{5} \times 35 = 0$ (c'est le but) sur la graduation inférieure. Ainsi, -33 sur la graduation supérieure correspond au 0 sur la graduation inférieure.
4. On donne
$$x = a \times y + b.$$
On utilise les couples de valeurs $x = 2$ quand $y = 14$ et $x = 12$ quand $y = 18$.
Ainsi, on obtient un système de deux équations à deux inconnues :
$$\left\{\begin{array}{l} 2 = 14 \times a + b \ [(L_1)] \\ 12 = 18 \times a + b \ [(L_2)] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2 = 14 \times a + b \ [(L_1)] \\ 10 = 4 \times a \ [(L_2) - (L_1)] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \frac{5}{2} = a \\ -33 = b \end{array}\right.$$